УДК 629.788
DOI 10.26732/j.st.2021.2.02

ЭЛЕМЕНТЫ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ МАНЕВРЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. П. Попов
*Курганский государственный университет,
г. Курган, Российская Федерация*

Цель исследования – аналитическое описание участка баллистической траектории, соответствующего нормальному падению космического аппарата на поверхность безатмосферной планеты. При этом движение нормально падающего тела характеризуется возрастающим ускорением свободного падения. Задача о скорости, времени и ускорении нормального падения тела на поверхность планеты при отсутствии атмосферы сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка, которое решается стандартным методом. Особенностью решения является формальное использование табличного интеграла на промежуточном этапе. Оказалось, однако, что его формула недостоверна, а именно, производная правой части не равна подынтегральному выражению. Из этого следует, что возможные существующие решения этой задачи, основанные на использовании указанного табличного интеграла, являются некорректными. В статье представлена корректировка этого табличного интеграла, что является попутным результатом исследования. В работе получено временное уравнение движения нормально падающего на поверхность планеты тела при отсутствии атмосферы, а также временные уравнения его скорости и ускорения. Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах и расчетах отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов.

Ключевые слова: баллистическая траектория, пассивный гравитационный маневр, космический аппарат, межпланетный полет, небесное тело.

Введение

Если перемещение тела при падении пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до центра тяготения, то ускорение свободного падения является практически неизменным. При этом задача установления параметров падения не представляет трудности. Далее этот случай не рассматривается.

1. Задача о скорости и времени падения тела

Падающее в вакууме тело имеет ускорение

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, r – мгновенное расстояние между телом и центром планеты. Исходное расстояние равно R. Знак «–» обусловлен противоположными направлениями векторов **a** и **r**. Масса тела пренебрежимо мала по сравнению с M.

Дифференциальное уравнение (1) решается следующим образом.

$$\frac{dr}{dt} = v(r), \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dr}v, \quad \frac{dv}{dr}v = -G\frac{M}{r^2},$$

$$vdv = -GM\frac{dr}{r^2}, \quad \int_0^v vdv = -GM\int_R^r \frac{dr}{r^2},$$

$$\frac{v^2}{2} = GM\left.\frac{1}{r}\right|_R^r,$$

✉ ip.popow@yandex.ru

$$\frac{v^2}{2}=GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right), \qquad (2)$$

$$v=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}. \qquad (3)$$

Знак «–» обусловлен той же причиной, что и выше.

$$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}},$$

$$\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}dt. \qquad (4)$$

2. Табличный интеграл

Для решения дифференциального уравнения (4) формально подходит табличный интеграл [1–3]:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-$$
$$-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C. \qquad (5)$$

Оказалось, однако, что эта формула недостоверна, а именно, производная правой части не равна подынтегральному выражению. Действительно,

$$\frac{df}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\left(-a+b-2x\right)+$$
$$+(a+b)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b-x}{a+b}}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{b-x}}=$$
$$=\frac{a-b+2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}+\frac{(a+b)\sqrt{a+b}\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a+x}\sqrt{b-x}}=$$
$$=\frac{a-b+2x+(a+b)^2}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}.$$

Таким образом, этот табличный интеграл применять нельзя.

3. Корректировка табличного интеграла

Теорема: Справедлива следующая формула:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=(a+b)\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-$$
$$-\sqrt{(b-x)(a+x)}+C. \qquad (6)$$

Доказательство 1.

$$\frac{a+x}{b-x}=t^2,\quad a+x=t^2b-t^2x,$$

$$x(1+t^2)=t^2b-a,\quad x=\frac{t^2b-a}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2tbdt}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2tdt,$$

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=\int t\left[\frac{2tb}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t\right]dt=$$

$$=\int\frac{2t^2b}{1+t^2}dt-\int\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t^2dt=$$

$$=2b\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt-$$
$$-2b\int\frac{t^4-t^2\,a/b+2t^2-2t^2+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=2b\int dt-2b\int\frac{1}{1+t^2}dt-$$
$$-2b\int dt+2b\int\frac{t^2\,a/b+2t^2+1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\int\frac{1}{1+t^2}dt+$$
$$+2b\left(a/b+2\right)\int\frac{t^2+1/\left(a/b+2\right)+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\,\mathrm{arctg}\,t+2b\left(a/b+2\right)\int\frac{dt}{1+t^2}-$$
$$-2b\left(a/b+2\right)\frac{a+b}{a+2b}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}=$$

$$=-2b\,\mathrm{arctg}\,t+2b\left(a/b+2\right)\mathrm{arctg}\,t-$$
$$-2b\frac{a+2b}{b}\frac{a+b}{a+2b}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\mathrm{arctg}\,t\right)+C=$$

$$=-2b\,\mathrm{arctg}\,t+2b\left(a/b+2\right)\mathrm{arctg}\,t-$$
$$-\frac{(a+b)t}{1+t^2}-(a+b)\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=(a+b)\left(\mathrm{arctg}\,t-\frac{t}{1+t^2}\right)+C=$$

$$= (a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - (a+b)\frac{\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}}{1+\frac{a+x}{b-x}} + C =$$

$$= (a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - (a+b)\frac{b-x}{a+b}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} + C =$$

$$= (a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}} - \sqrt{(b-x)(a+x)} + C.$$

Теорема доказана.

Доказательство 2.

$$\frac{df}{dx} = (a+b)\frac{1}{1+\frac{a+x}{b-x}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\left[\frac{1}{b-x} + (a+x)\frac{-1}{(b-x)^2}(-1)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\left(b-a-2x\right) =$$

$$= \frac{(a+b)(b-x)}{2(a+b)}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\frac{b-x+a+x}{(b-x)^2} -$$

$$-\frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\frac{a+b}{b-x} - \frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}} =$$

$$= \frac{a+b}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}} - \frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}} =$$

$$= \frac{2a+2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}} = \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}.$$

Теорема доказана.

4. Продолжение решения исходной задачи

Интегрирование дифференциального уравнения (4) в соответствии с (6) дает:

$$\int_R^r \sqrt{\frac{r}{R-r}}dr = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt,$$

$$\left[R\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}} - \sqrt{r(R-r)}\right]\Bigg|_R^r = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt,$$

$$R\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}} - R\frac{\pi}{2} - \sqrt{r(R-r)} = -\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}\right) + \sqrt{r(R-r)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t. \quad (7)$$

Это решение дифференциальных уравнений (4) и (1) является уравнением движения нормально падающего тела.

Из выражения (2) следует:

$$r = \frac{2GMR}{2GM + Rv^2}.$$

Подстановка этого выражения в (7) дает:

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}{R - \frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}}\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\left(R - \frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2GMR}{2GMR + R^2v^2 - 2GMR}}\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{2GMR\left(2GMR + R^2v^2 - 2GMR\right)}{\left(2GM + Rv^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2GMR}}{Rv} + \frac{v\sqrt{2GMR}}{2GM+Rv^2} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\frac{t}{R}.$$

Это временная функция скорости.

Для получения временной функции ускорения следует (1) подставить в (7).

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}{R - \left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}}\right) +$$

$$+\sqrt{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}\left(R - \left(GMa^{-1}\right)^{1/2}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}t.$$

В соответствии с (7) период падения тела на поверхность планеты равен:

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R_M}{R-R_M}}\right) +$$

$$+\sqrt{R_M(R-R_M)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}T, \quad (8)$$

где R_M – радиус планеты.

В соответствии с (3) скорость тела у поверхности планеты равна:

$$V = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R}}. \qquad (9)$$

Пример.

$R = 7\cdot10^6$ м, параметры планеты не отличаются от земных. $R_M = 6{,}371\cdot10^6$ м; $M = 5{,}9726\cdot10^{24}$ кг; $G = 6{,}6743\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

В соответствии с (8):

$$7\cdot10^6\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6{,}371\cdot10^6}{(7-6{,}371)\cdot10^6}}\right) +$$

$$+\sqrt{6{,}371\cdot10^6(7-6{,}371)\cdot10^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot6{,}6743\cdot10^{-11}\cdot5{,}9726\cdot10^{24}}{7\cdot10^6}}T.$$

Период падения тела на поверхность планеты равен: $T = 387{,}275$ с $= 6{,}455$ мин.

В соответствии с (9) скорость тела у поверхности планеты равна:

$$V = -\sqrt{2\cdot6{,}6743\cdot10^{-11}\cdot5{,}9726\cdot10^{24}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{6{,}371\cdot10^6} - \frac{1}{7\cdot10^6}} = 3353{,}297 \text{ м/с}.$$

В таблице представлено сравнение значений периода падения тела на поверхность планеты из примера и полученного на основе использования некорректного табличного интеграла (5).

Таблица

Сравнение результатов расчета периода падения тела

Параметр	Значение
Период падения тела на основе некорректного интеграла (5)	405,169 с
Период падения тела на основе предложенной методики	387,275 с
Абсолютная погрешность	+17,894 с
Относительная погрешность	4,62%

Заключение

Трудно представить, что никто и никогда не искал формулы времени, скорости и ускорения при нормальном свободном падении тела. Однако если при этом использовался табличный интеграл (5), то, конечно, те формулы неверны. Поводом усомниться в интеграле (5) послужило то, что в ряде конкретных случаев значения аргумента у арксинуса превышали единицу.

Корректировка этого интеграла (6) особенно актуальна с учетом его очевидного прикладного характера.

Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах [4–6] и расчетах отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов [7–10].

Список литературы

[1] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М. Наука. 1977. 872 с.

[2] Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. М. Наука. 1971. 736 с.

[3] Справочник машиностроителя. Под ред. Н. С. Ачеркана. М. : Редакция машиностроительной литературы. 1963. 592 с.

[4] Старинова О. Л., Сергаева Е. А., Шорников А. Ю. Проектно-баллистический анализ миссии длительного исследования астероида Апофис наноспутником с электроракетной двигательной установкой // Космические аппараты и технологии. 2020. № 3. С. 161–170.

[5] Панько С. П., Цимбал М. С. Измерение скорости космического аппарата // Космические аппараты и технологии. 2015. № 4. С. 25–29.

[6] Королев В. С. Задачи оптимального маневрирования космических аппаратов для инспектирования или обслуживания системы тел // Космические аппараты и технологии. 2015. № 2. С. 18–23.

[7] Попов И. П. Расчетные системы отсчета при относительном движении космических объектов // Инженерная физика. 2019. № 3. С. 40–43.

[8] Попов И. П. Системы отсчета в навигации движущихся объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 3. С. 189–192.

[9] Чеботарев В. Е., Борисов В. И. Разработка алгоритма расчета траектории перехвата ракетой астероида, опасного для планеты Земля // Космические аппараты и технологии. 2012. № 2. С. 30–34.

[10] Левкина П. А., Сергеев А. В. Характеристики новых объектов космического мусора, обнаруженных в терскольской обсерватории // Научные труды Института астрономии РАН. 2019. Т. 4. С. 306–311.

ELEMENTS OF BALLISTIC CALCULATION FOR SPACECRAFT GRAVITY ASSIST

I. P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

The purpose of the study is an analytical description of the section of the ballistic trajectory corresponding to the normal fall of the spacecraft on the surface of an atmosphereless planet. In this case, the motion of a normally falling body is characterized by an increasing acceleration of gravity. The problem of the speed, time and acceleration of the normal fall of a body on the planet's surface in the absence of an atmosphere is reduced to solving a second-order differential equation, which is solved by the standard method. A feature of the solution is the formal use of the tabular integral at an intermediate stage. It turned out, however, that his formula is unreliable, namely, the derivative of the right-hand side is not equal to the integrand. It follows from this that the possible existing solutions to this problem, based on the use of the indicated tabular integral, are incorrect. The article presents the correction of this tabular integral, which is an incidental result of the study. In this work, the time equation of motion of a body normally falling on the surface of the planet in the absence of an atmosphere, as well as the time equations of its speed and acceleration are obtained. The results obtained can be useful in calculating passive gravity assist during interplanetary flights and calculating the sheer fall of small celestial bodies and spent structural elements of spacecraft.

Keywords: ballistic trajectory, passive gravity assist, spacecraft, interplanetary flight, celestial body.

References

[1] Vygodskiy M. Ya. *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of Higher Mathematics]. Moscow, Science, 1977, 872 p. (In Russian)

[2] Bermant A. F., Aramanovich I. G. *Kratkiy kurs matematicheskogo analiza dlya vtuzov* [A short course in mathematical analysis for technical colleges]. Moscow, Science, 1971, 736 p. (In Russian)

[3] *Spravochnik mashinostroitelya* [Mechanical Engineer Handbook]. Moscow, 1963, 592 p. (In Russian)

[4] Starinova O. L., Sergaeva E. A., Shornikov A. Yu. Design and ballistic analysis of the mission for long-term study of the asteroid Apophis by a nanosatellite with an electric rocket propulsion system // Spacecrafts & Technologies, 2020, vol. 4, no. 3, pp. 161–170. doi: 10.26732/j.st.2020.3.04

[5] Panko S. P., Tsimbal M. S. Measurement of the velocity of the spacecraft // The Research of the Science City, 2015, no. 4, pp. 25–29.

[6] Korolev V. S. Problem optimum spaceship trajectory to inspect or service system of body // The Research of the Science City, 2015, no. 2, pp. 18–23.

[7] Popov I. P. *Raschetnyye sistemy otscheta pri otnositel'nom dvizhenii kosmicheskikh ob"yektov* [Computational reference systems for the relative motion of space objects] // Engineering Physics, 2019, no. 3, pp. 40–43. (In Russian)

[8] Popov I. P. *Sistemy otscheta v navigatsii dvizhushchikhsya ob"yektov* [Reference systems in the navigation of moving objects] // Mechatronics, automation, control, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 189–192. (In Russian)

[9] Chebotarev V. Ye., Borisov V. I. *Razrabotka algoritma rascheta trayektorii perekhvata raketoy asteroida, opasnogo dlya planety Zemlya* [Development of an algorithm for calculating the trajectory of a rocket intercepting an asteroid dangerous for planet Earth] // Spacecraft & Technologies, 2012, no. 2, pp. 30–34. (In Russian)

[10] Levkina P. A., Sergeyev A. V. *Kharakteristiki novykh ob"yektov kosmicheskogo musora, obnaruzhennykh v terskol'skoy observatorii* [Characteristics of new objects of space debris discovered at the Terskol observatory] // Proceedings of the Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, 2019, vol. 4, pp. 306–311. (In Russian)

Сведения об авторах

Попов Игорь Павлович – кандидат технических наук, старший преподаватель Курганского государственного университета. Окончил Курганский машиностроительный институт в 1983 году. Область научных интересов: космическая техника, теоретическая механика.

ORCID: 0000-0001-8683-0387