

**ВОПРОСЫ КОРРЕКЦИИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

П. А. Лакиза, Д. А. Красноруцкий,

В. А. Бернс, Е. П. Жуков✉, А. В. Шкода

*Сибирский научно-исследовательский институт авиации
им. С. А. Чаплыгина*

г. Новосибирск, Российская Федерация

ПАО «Объединённая авиастроительная корпорация

«Опытно-конструкторское бюро Сухого»

г. Москва, Российская Федерация

Излагается решение вопросов, возникающих при коррекции расчетных динамических моделей летательных аппаратов по результатам испытаний. К ним относится выбор методики модальных испытаний на основе анализа соотношений между вынужденными монофазными и собственными колебаниями. По результатам испытаний можно установить диссипативные свойства конструкций. Отмечено, что погрешности экспериментального определения собственных частот колебаний значительно ниже погрешностей в оценках обобщенных масс и коэффициентов демпфирования. Представлен метод коррекции параметров упругости конечно-элементных моделей летательных аппаратов. Матрица масс считается определенной точно. Целевой функцией является взвешенная сумма квадратов разностей между экспериментальными и расчетными собственными частотами. Для минимизации целевой функции используется итерационный процесс. Проведены исследования чувствительности коррекции к погрешностям в результатах модального анализа. Предложена методика моделирования диссипативных свойств конструкций по результатам испытаний. Для всех исследуемых тонов колебаний определяются обобщенные коэффициенты демпфирования, величины которых назначаются целевыми. Эти коэффициенты образуют диагональную матрицу демпфирования в главных координатах. Для построения матрицы демпфирования в физической системе координат использована модель рэлеевского демпфирования. Проведена коррекция расчетной модели консоли крыла самолета и самолета типа «летающее крыло».

Ключевые слова: расчетные модели летательных аппаратов, экспериментальный модальный анализ, коррекция конечно-элементных моделей, моделирование диссипативных свойств, летающее крыло.

Поступила в редакцию: 22.05.2025. Принята к печати: 02.07.2025.

Введение

На этапе проектирования летательных аппаратов (ЛА) разрабатываются их расчетные динамические модели. Эти модели используются для получения предварительных решений, например, таких проблем, как защита от флаттера авиационной техники (АТ) и оценка нагрузок, действую-

ющих на элементы конструкции космических аппаратов (КА). После этапа проектирования технологии использования расчетных моделей АТ и КА различаются. Для АТ создаются динамически подобные модели (ДПМ), и первая коррекция расчетных моделей производится по результатам продувок ДПМ в аэродинамических трубах [1]. В дальнейшем эти расчетные модели корректируются при внесении изменений в конструкции АТ в опытном производстве и серийной эксплуатации по результатам экспериментального модального

анализа. В то же время нагрузки на элементы КА определяются по расчетной модели, коррекция которой производится по результатам модальных испытаний в рамках наземной экспериментальной отработки КА [2].

Программа наземных модальных испытаний обычно предусматривает исследования собственных тонов колебаний ЛА в заданном частотном диапазоне. Определению подлежат в первую очередь собственные частоты, формы и характеристики демпфирования. За редким исключением требуется контроль обобщенных масс. Основным методом модальных испытаний является классический модальный анализ, основные положения и теоретическое обоснование которого изложены в работах [3–7]. Современное состояние методик испытаний описано в трудах [3, 6, 8, 9].

Среди методов коррекции расчетных моделей по результатам модальных испытаний наибольшее распространение получили детерминированные методы. Их реализация происходит в несколько этапов. На первом этапе выявляются такие параметры собственных тонов колебаний конструкций, которые необходимы для математического описания исследуемого с помощью расчетной модели явления (флэттер АТ, динамическая нагруженность элементов КА и т.д.). На втором этапе выявляются параметры, которые с требуемой достоверностью определяются экспериментально. Значения этих параметров называют целевыми. На заключительном этапе минимизируется целевая функция, описывающая разность между параметрами расчетной модели и соответствующими экспериментальными данными [10–12]. Необходимо отметить, что в целевой функции могут присутствовать как параметры разной природы, так и параметры, определяемые с разной степенью достоверности [13]. Поэтому параметрами коррекции могут одновременно являться, например, геометрия конструкций, механические характеристики материалов, граничные условия.

1. Методика модальных испытаний

Модальные испытания ЛА производятся методом вынужденных монофазных колебаний [7]. В соответствии с этим методом дифференциальные уравнения движения ЛА в процессе испытаний при многоточечном гармоническом возбуждении имеют вид:

$$A\ddot{Y} + R + CY = E \sin \omega t + F \cos \omega t. \quad (1)$$

Здесь $A(N \times N)$ и $C(N \times N)$ – матрицы инерции и жесткости; $\ddot{Y}(N)$ и $Y(N)$ – ускорения и перемещения в контрольных точках ЛА; $R(N)$ – силы демпфирования; $E(N)$ и $F(N)$ – составляющие сил

возбуждения; ω – частота колебаний; N – число степеней свободы расчетной модели ЛА.

Диссипативные свойства ЛА опишем как

$$R = H\dot{Y} / \omega, \quad (2)$$

где $H(N \times N)$ – матрица демпфирования. Формула (2) отражает основное свойство сил демпфирования: их фаза есть фаза скорости колебаний.

Решение (1) есть $Y = U \sin \omega t - V \cos \omega t$. Полагается, что подбором возбуждения реализуется режим вынужденных монофазных колебаний:

$$U = \lambda V, \quad (3)$$

где λ – действительное число. В этом случае дифференциальные уравнения (1) с учётом (2) и (3) приводятся к виду:

$$(1 + \lambda^2)(C - \omega^2 A)V = \lambda E - F, \quad (4)$$

$$(1 + \lambda^2)HV = E + \lambda F. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) позволяют независимо определять упруго-массовые характеристики ЛА и характеристики демпфирования.

В статье [7] разработаны способы подбора монофазного ($F = 0$) и немонофазного возбуждения для реализации режима монофазных колебаний, а также способ подбора возбуждения ограниченным числом сил. Изложен порядок проведения экспериментального модального анализа методом вынужденных монофазных колебаний. Остановимся здесь на нескольких частных, но значимых для практики модальных испытаний случаях.

Программа испытаний обычно предусматривает определение в первую очередь частот и форм собственных тонов колебаний в задаваемом частотном диапазоне. Из (4) следует, что, используя монофазное возбуждение и условие $\lambda = 0$ (фазовый резонанс), можно определить собственные частоты и собственные векторы $W_\ell = V_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, L$; $L \leq N$.

В работах [14–16] представлены результаты исследований погрешностей оценок обобщенных динамических характеристик ЛА в модальных испытаниях. Достоверность определения этих параметров определяют такие факторы, как случайные ошибки возбуждения и измерения колебаний, помехи тонов с близкими собственными частотами, вывешивание ЛА на упругой системе. Показано, что наименьшей чувствительностью к указанным факторам обладает определение собственных частот методом фазового резонанса. Например, минимальные погрешности в обобщенных массах на порядок превышают погрешности в собственных частотах. При этом области частот вынужденных колебаний ЛА в окрестностях фазовых резонансов, в которых справедливо это соотношение погрешностей, не представляется возможным установить.

2. Коррекция расчетных динамических моделей

Основные положения рассматриваемого в настоящей работе метода коррекции конечно-элементной модели (КЭ-модели) ЛА изложены авторами в работах [17, 18]. Рассматривается обобщенная проблема собственных значений КЭ-модели:

$$(C - \mu A)W = 0,$$

где μ – собственные значения.

Расчетные матрицы инерции и жесткости строятся по конструкторской документации на этапе проектирования ЛА. По результатам, изложенным в предыдущем разделе, установлено, что достоверность экспериментальной оценки собственных частот является основанием считать их параметрами целевой функции для коррекции характеристик упругости расчетной модели. При этом коррекция расчетной матрицы инерции по результатам модальных испытаний нецелесообразна ввиду больших погрешностей в оценках обобщенных масс. Поэтому корректируются только характеристики упругости с помощью корректирующей КЭ-модели с матрицей ΔC .

На рисунке 1 показана принципиальная схема предлагаемого метода.

В результате коррекции необходимо найти такую ΔC , чтобы достигнуть целевого значения μ^* :

$$[(C + \Delta C) - \mu^* A]W^* = 0.$$

Корректирующая матрица ΔC представляется в виде суммы матриц: $\Delta C = \Delta C_{int} + \Delta C_{ext}$. Первая матрица соответствует внутренним корректирующим элементам и определяет изменение характеристик самой модели, в то время как вторая служит для изменения характеристик внешних связей, приложенных к модели.

Для поиска корректирующих жесткостей ($\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$), использующихся для составления матрицы ΔC , применяется итерационный алгоритм. На каждой итерации минимизируется следующая целевая функция:

$$\begin{aligned} F^{(j+1)}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = \\ \sum_{\ell=1}^L v_{\ell} \left[(W_{\ell}^{(j)})^T \Delta C^{(j+1)} W_{\ell}^{(j)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Delta \mu_{\ell}^{(j+1)} (W_{\ell}^{(j)})^T A W_{\ell}^{(j)} \right]^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (6)$$

где j – номер итерации; v_{ℓ} – весовой коэффициент ℓ -го тона; L – число тонов колебаний, по которым производится коррекция; $\mu_{\ell}^{(j+1)} = \mu_{\ell}^{(j)} + \Delta \mu_{\ell}^{(j+1)}$ – приближение собственного значения к целевому μ_{ℓ}^* на шаге $j + 1$.

Число параметров коррекции m определяется количеством вводимых корректирующих элементов и их типом. Количество корректирующих элементов определяется числом связей между элементами в матрице жесткости, которое может быть уменьшено путем введения взаимосвязей между ним, например учета симметрии модели [18].

В ходе итерационного процесса (6) контролируется соотношение между изменяющимися в результате коррекции формами собственных колебаний и их исходным состоянием. Для этого используется критерий модального соответствия:

$$MAC(W^*, W) = \frac{(W^{*T} W)^2}{(W^{*T} W^*)(W^T W)}. \quad (7)$$

В целевых значениях собственных частот колебаний присутствуют погрешности, источники которых указаны в предыдущем разделе. Необходимо отметить, что наличие системы упругого вывешивания ЛА и тонов с близкими собственными частотами приводят к систематическим отклонениям целевых значений частот от их

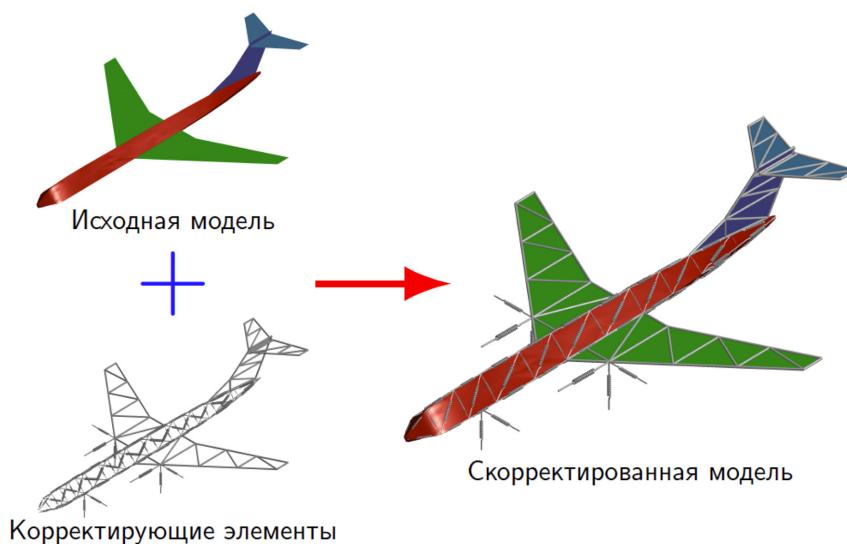


Рисунок 1. Принципиальная схема коррекции

точных значений. Эти отклонения можно оценить. Однако ошибки измерения колебаний имеют случайный характер, и погрешности определяемых по этим измерениям собственных частот также случайны. Поэтому необходимо исследовать устойчивость алгоритма коррекции к таким ошибкам. Эти исследования проведены методом статистического моделирования.

Будем считать, что погрешности определения целевых значений собственных частот распределяются по усеченному нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Для моделирования погрешностей использовался генератор случайных чисел. Исследования устойчивости алгоритма коррекции проводились применительно к свободной прямоугольной пластине по следующему плану:

- вычислялись исходные значения собственных частот и форм колебаний (виртуальный эксперимент);
- вводились случайные отклонения Δf заданного уровня в значения частот f ;
- корректировались параметры расчетной модели по искаженным значениям частот, вычислялись «ошибочные» собственные формы колебаний;
- оценивалось влияние погрешностей в собственных частотах на результаты коррекции по изменению критерия модального соответствия (7) ε_{MAC} между «ошибочными» и исходными формами колебаний;
- виртуальный эксперимент повторялся до получения стабильных оценок математического ожидания и дисперсии ε_{MAC} .

Исследования по изложенному плану были проведены для нескольких уровней погрешностей Δf и при разном числе тонов p , по которым корректировалась расчетная модель. На каждом варианте расчетов проверялось соответствие распределений случайных величин ε_{MAC} нормальному закону.

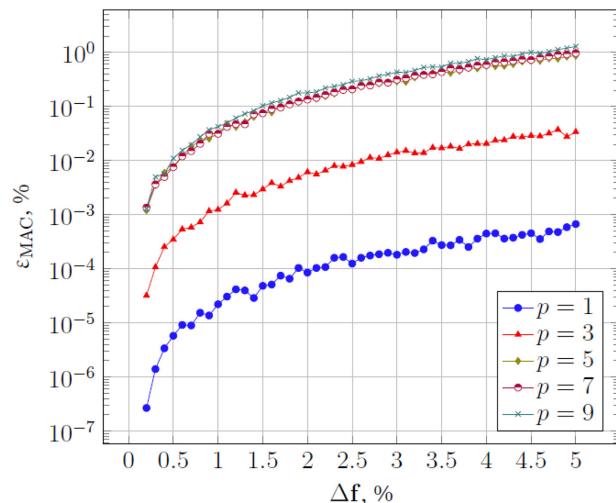


Рисунок 2. Погрешности коррекции расчетной модели пластины

По результатам исследований, представленным на рисунке 2, можно сделать вывод о том, что для рассматриваемой модели алгоритм коррекции обладает низкой чувствительностью к погрешностям в результатах экспериментального модального анализа. Кроме того, с увеличением числа тонов p погрешность коррекции ε_{MAC} стремится к предельному значению.

Исследования устойчивости алгоритма коррекции к погрешностям в целевых значениях собственных частот проведены также применительно к конечно-элементной расчетной модели условного КА (рисунок 3). Расчетная модель имеет пятьдесят тысяч степеней свободы.

Результаты исследований аналогичны полученным для пластины: с увеличением числа тонов, по которым производится коррекция модели, погрешность коррекции стремится к предельному значению (рисунок 4). Несмотря на то, что при оценке чувствительности алгоритма коррекции

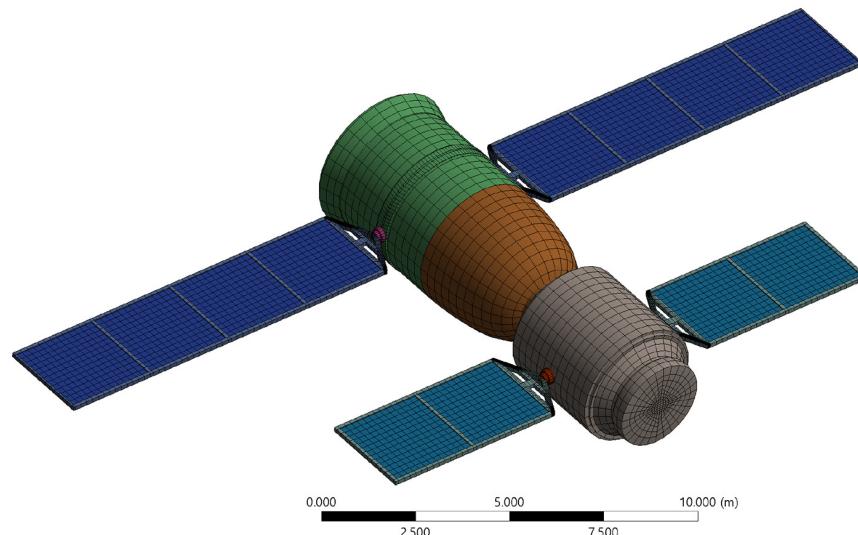


Рисунок 3. КЭ-модель условного КА

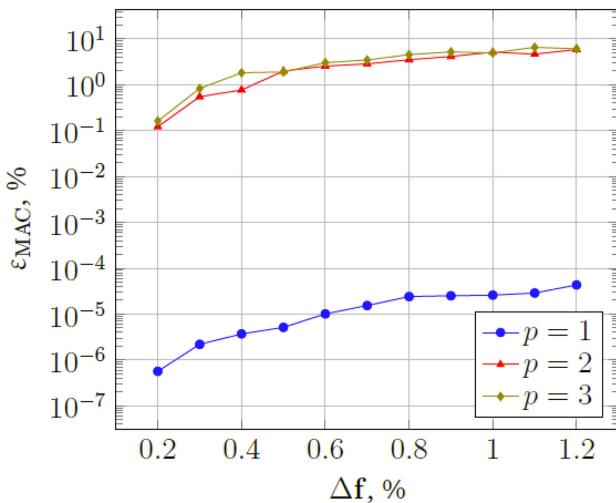


Рисунок 4. Погрешности коррекции расчетной модели условного КА

на примере моделей пластины и КА просматриваются общие закономерности, количественные выражения чувствительности алгоритма отличаются. Поэтому рекомендуется проводить анализ по предложенному плану для каждой исследуемой модели объекта.

Сделаны также расчеты изменений жесткостей расчетной модели при коррекции по трем тонам собственных колебаний. На рисунке 5 красным цветом отмечены области, в которых для достижения целевых значений коррекции расчетная жесткость была повышенена, а синим – понижена.

конструкций. Практически это означает приданье матрице демпфирования некоторых свойств аналогично матрицам инерции и жесткости. Но если положительная определенность, симметрия и возможность приведения матриц инерции и жесткости к диагональному виду одним преобразованием координат есть следствие понятий о кинетической и потенциальной энергиях, то для придания конкретных свойств матрице демпфирования оснований не имеется. Здесь можно констатировать только то, что матрица демпфирования положительно определенная, поскольку в конструкции ЛА нет внутренних источников энергии, идущей на поддержание вынужденных колебаний.

Для выявления свойств матрицы демпфирования в работе [7] предложено сопоставить монофазные колебания с собственными на частотах вне фазовых резонансов. Установлено, что если на этих частотах при монофазном возбуждении существуют действительные значения λ_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, L$) и формы монофазных колебаний V_ℓ совпадают с соответствующими формами W_ℓ собственных колебаний, то из (4) и (5) следует

$$V_\ell^T (\omega^2 A - C) V_j = V_\ell^T H V_j = 0, \quad \ell \neq j. \quad (8)$$

Для $\ell = j$ получаем

$$V_\ell^T H V_\ell = h_\ell, \quad (9)$$

где h_ℓ – обобщенный коэффициент демпфирования ℓ -го тона, способы определения которого известны [5–7, 14]. Важно отметить, что из опыта

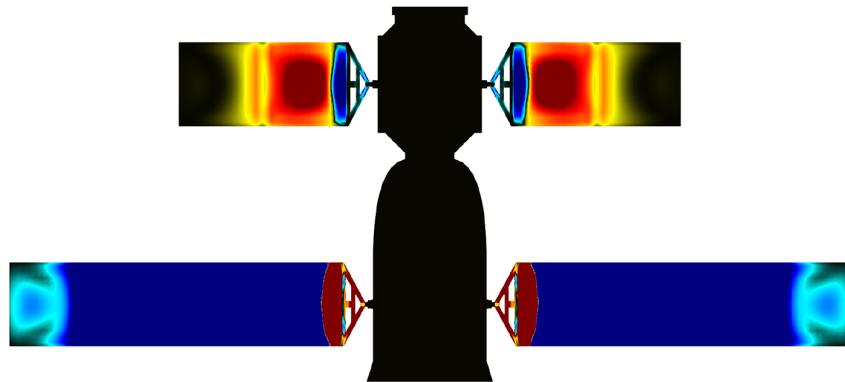


Рисунок 5. Распределение изменений жесткостей расчетной модели условного КА в результате коррекции

Черный цвет соотносится с областями неизмененной расчетной жесткости.

3. Моделирование диссипативных свойств конструкций

Решение задачи описания диссипативных свойств в расчетных динамических моделях ЛА можно существенно упростить, если принять априори модель рассеяния энергии при колебаниях

модальных испытаний следует, что практически всегда можно выделить диапазон частот в окрестности каждого фазового резонанса исследуемых тонов, где монофазные колебания совпадают с собственными колебаниями. На этом основании следует вывод о том, что матрица демпфирования $H(L \times L)$ в главных координатах имеет диагональный вид.

Для восстановления матрицы демпфирования $H(N \times N)$ в расчетных моделях ЛА с N степенями свободы по построенной по результатам испыта-

ний матрице $H(L \times L)$ ($L \leq N$, практически всегда $L \ll N$) разработан алгоритм, подобный представленному в разделе 2. При этом значения диагональных элементов h_ℓ матрицы H приняты как целевые h_ℓ^* . Свойства матрицы $H(L \times L)$, которые следуют из (8) и (9), распространяются на матрицу $H(N \times N)$ на том основании, что практический интерес представляют только L (как правило, низших) тонов, и влияние на характеристики этих тонов остальных $N - L$ собственных колебаний пренебрежимо мало. Поэтому начальное приближение для построения матрицы демпфирования в физической системе координат строится по модели Рэлея:

$$H = \alpha C^* + \beta A,$$

где $C^* = C + \Delta C$ – матрица жесткости после коррекции; α и β – параметры демпфирования.

В модальных испытаниях были определены обобщенные коэффициенты демпфирования h_ℓ^* для L из N тонов колебаний, поэтому для определения параметров α и β методом сопряженных градиентов решается задача минимизации целевой функции:

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{\ell=1}^L v_\ell \left(1 - \frac{\alpha c_\ell + \beta a_\ell}{h_\ell^*} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta}. \quad (10)$$

Производные, составляющие вектор-градиент целевой функции, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{\ell=1}^L \left[v_\ell \left(1 - \frac{\alpha c_\ell + \beta a_\ell}{h_\ell^*} \right) \frac{c_\ell}{h_\ell^*} \right], \\ \frac{\partial G}{\partial \beta} &= -2 \sum_{\ell=1}^L \left[v_\ell \left(1 - \frac{\alpha c_\ell + \beta a_\ell}{h_\ell^*} \right) \frac{a_\ell}{h_\ell^*} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В (10) и (11) входят весовые коэффициенты корректируемых тонов v_ℓ , а также обобщенные жесткости и обобщенные массы с учетом собственных векторов после коррекции:

$$c_\ell = W_\ell^{*T} C^* W_\ell^*, \quad a_\ell = W_\ell^{*T} A W_\ell^*, \quad \ell = 1, 2, \dots, L.$$

Отметим, что в результате решения задачи (10) не удается с высокой степенью точности достичь целевых обобщенных коэффициентов демпфирования в силу ограниченности набора параметров коррекции. Поэтому полученное приближение матрицы демпфирования изменяется аналогично тому, как корректируется матрица жесткости:

$$\tilde{H} = H + \Delta H^{\text{int}} + \Delta H^{\text{ext}},$$

где ΔH^{int} и ΔH^{ext} – матрицы демпфирования внутренних и внешних корректирующих элементов. Под внутренним демпфированием понимаются потери энергии за счет трения в материалах модели, а под внешним – рассеяние энергии при взаимодействии модели с окружающей средой, например воздухом. Последнее особенно актуально для

крупногабаритных конструкций с большой парусностью.

Заметим, что внутренние корректирующие элементы, составляющие матрицу ΔH^{int} , являются сбалансированными, то есть позволяют изменять межузловые связи КЭ-модели, не накладывая внешних связей. Это приводит к невозможности учесть внешнее демпфирование введением только таких элементов. Поэтому в случае, когда внешнее демпфирование оказывает существенное влияние на конструкцию, вводятся внешние корректирующие элементы, составляющие матрицу демпфирования ΔH^{ext} . Тогда для новой матрицы демпфирования можно записать обобщенные коэффициенты демпфирования в следующем виде (индекс тона опущен):

$$\tilde{h} = h + \Delta h^{\text{int}} + \Delta h^{\text{ext}}, \quad (12)$$

где \tilde{h} – обобщенный коэффициент демпфирования, соответствующий начальному приближению матрицы демпфирования; Δh^{int} и Δh^{ext} – обобщенные коэффициенты демпфирования внутренних и внешних корректирующих элементов.

Выражения для обобщенных коэффициентов демпфирования Δh^{int} и Δh^{ext} в общем случае зависят от типа вводимых корректирующих элементов. В [18] были получены выражения для случая базовых корректирующих элементов.

Алгоритм восстановления матрицы демпфирования заключается в том, чтобы найти такие параметры $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, которые будут решением неоднородной системы нелинейных уравнений:

$$r_\ell(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = \tilde{h}_\ell - h_\ell^* = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, L, \quad (13)$$

где m – число корректирующих элементов, как в разделе 2.

Решением системы (13) считается решение задачи безусловной минимизации целевой функции, в качестве которой принимается сумма квадратов каждого из уравнений со взвешенной суммой квадратов коэффициентов демпфирования:

$$F = \sum_{\ell=1}^L v_\ell r_\ell^2 + v_c \sum_{i=1}^m \eta_i^2 \rightarrow \min, \quad (14)$$

где v_ℓ – весовые коэффициенты корректируемых тонов, v_c – параметр регуляризации. Из практики применения метода: если модель хорошо описывает реальный объект, то можно положить $v_c = 0$. Задача (14) решается минимизацией целевой функции методом сопряженных градиентов.

4. Практика коррекции расчетных моделей

4.1. Коррекция расчетной модели консоли крыла самолета

Расчетные модели ЛА могут быть представлены в виде результата синтеза расчетных моделей

их составных частей. Такими составными частями служат, как правило, агрегаты ЛА: крыло, фюзеляж, оперение и т.д. Это позволяет производить модальные испытания и коррекцию расчетных моделей поэтапно. Следствием такого подхода является то, что на каждом этапе коррекции число корректируемых параметров значительно меньше числа параметров полной расчетной модели.

В качестве примера приведено решение задачи коррекции расчетной модели консоли крыла самолета. На время модальных испытаний консоль крыла была вывешена вертикально на упругой подвеске (рисунок 6). В эксперименте определены собственные частоты пяти низших тонов собственных колебаний крыла.

Конструктивно-силовой набор модели консоли крыла представлялся невесомыми балочными и оболочечными элементами. При этом инерционные характеристики крыла воспроизводились дискретными массами, имеющими эксцентриситет. Для формирования геометрической модели использовались таблицы с координатами вершин

поверхностей и концевых точек балок. Толщины элементов обшивки задавались дискретно по вершинам, образующим граничные поверхности. Распределение изгибных жесткостей внутри каждой балки описывалось полиномом третьей степени, заданным в равноотстоящих узлах. Число степеней свободы в модели составило двадцать тысяч. Для сшивки панелей как между собой, так и с балочным каркасом использовались абсолютно жесткие балки.

Коррекция КЭ-модели проводилась по пяти наборам экспериментально определенных частот собственных тонов колебаний. Каждый последующий набор дополнял предыдущий одним тоном. На первом этапе была проведена коррекция только по изгибу консоли крыла I-го тона, а затем еще и по изгибу консоли крыла II-го тона. В конечном итоге осуществлена одновременная коррекция по пяти тонам (таблица 1).

Распределения изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы КЭ-модели до и после коррекции по первому тону и пяти то-

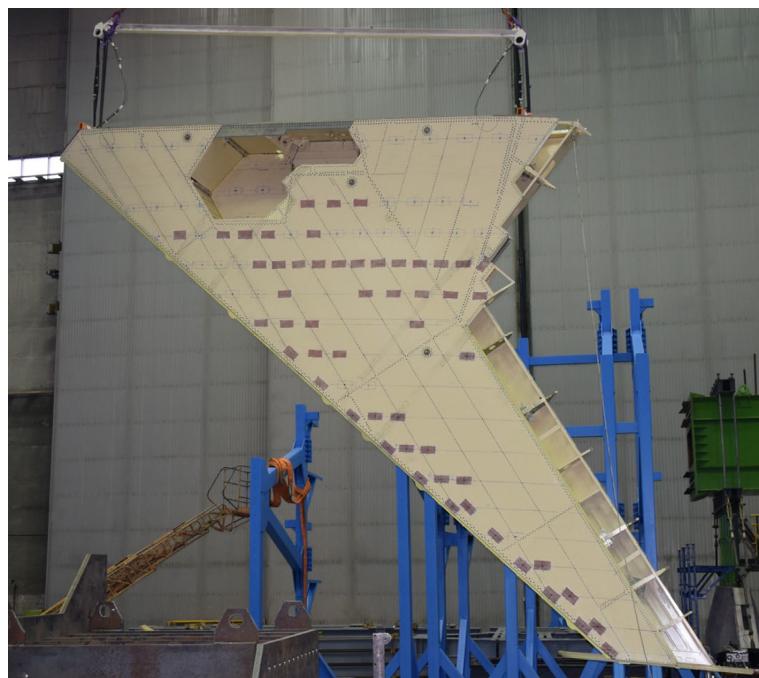


Рисунок 6. Модальные испытания консоли крыла

Таблица 1

Результаты коррекции модели консоли крыла

Тон	Относительная частота		До	Погрешность до и после коррекции, %					
	Эксперимент	Исходная модель		После					
				1	2	3	4	5	
1	1,00	1,51	50,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
2	2,28	3,18	39,5	-7,4	0,0	0,0	0,0	0,0	
3	3,37	4,13	22,6	-18,6	-13,8	0,0	0,0	0,0	
4	3,95	4,82	21,8	-19,1	-17,8	-8,2	0,0	0,0	
5	4,87	6,15	26,2	-16,2	-21,8	-2,6	-4,4	0,0	

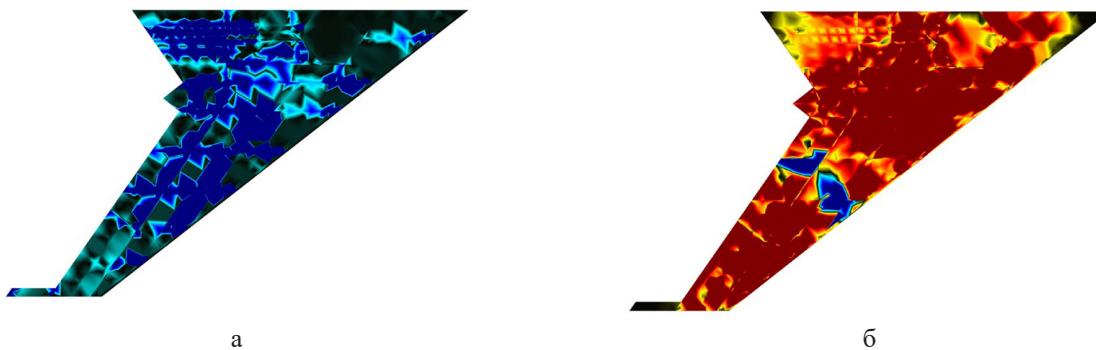


Рисунок 7. Распределения изменений узловых жесткостей в результате коррекции:
а – по одному тону; б – по пяти тонам

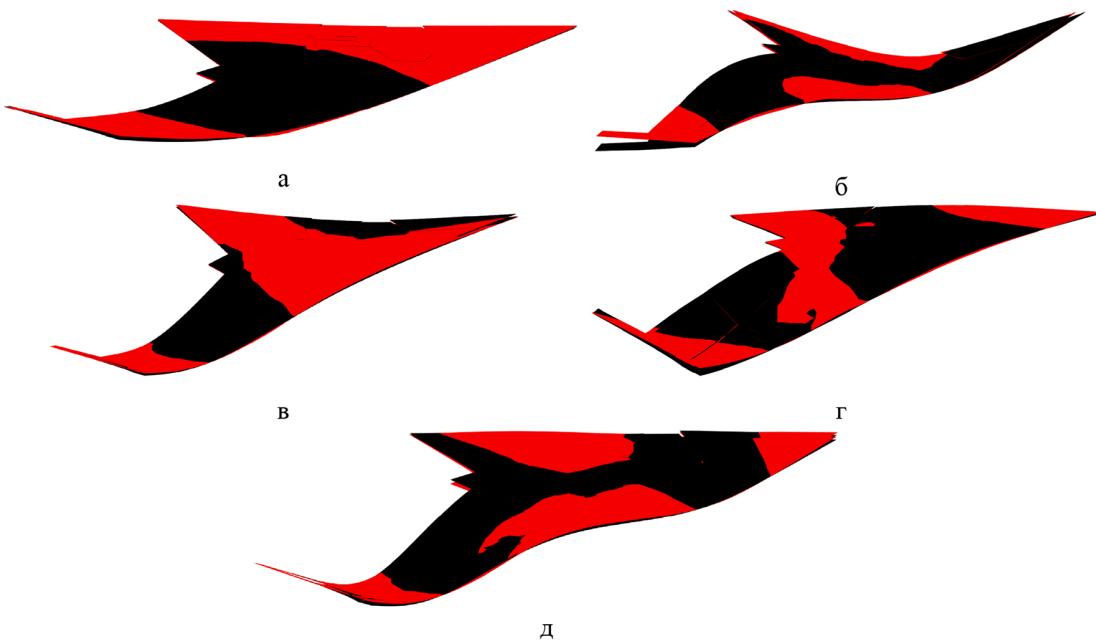


Рисунок 8. Первые пять форм колебаний консоли крыла до и после коррекции

нам колебаний показаны на рисунках 7а и 7б соответственно.

Формы колебаний до и после коррекции удовлетворительно коррелируют между собой по критерию модального соответствия. Сравнение первых пяти форм колебаний срединной поверхности крыла до (черным цветом) и после (красным цветом) коррекции приведено на рисунках 8а-8д.

4.2. Коррекция расчетной модели самолета типа «летающее крыло»

Рассмотрим коррекцию расчётной модели самолета типа «летающее крыло». Для построения модели использована пластинчато-балочная схематизация элементов планера на основе метода полиномов. Такой подход обеспечивает возможность быстрой параметризации исследуемой модели для оценки ее модальных характеристик. Однако такая модель обладает невысокой степенью детализации, что приводит к расхождениям между расчетными и экспериментальными модальными характеристиками. Для минимизации

этих расхождений предлагается варьировать упругие параметры расчетных моделей без добавления корректирующих элементов, поскольку их число будет сопоставимо с числом элементов, образующих модель, и, как следствие, затруднит использование этой модели для последующих параметрических расчётов аэроупругости.

Целью коррекции в данном случае является изменение упругих характеристик модели таким образом, чтобы частоты и формы собственных колебаний были близки к экспериментальным с заданной точностью. При этом целевая функция записывается следующим образом:

$$F = \sum_{\ell=1}^L \left[1 - \frac{f_\ell}{f_\ell^*} \right]^2 + w \sum_{\ell=1}^L \left[1 - \text{MAC}(W_\ell, W_\ell^*) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (15)$$

где w – весовой коэффициент влияния ошибок форм колебаний, f_ℓ и f_ℓ^* – текущие и целевые значения частот собственных колебаний соответст-

но. Исходя из того, что точность определения частот на порядок превышает точность определения форм колебаний, полагаем $w = 0.1$.

Задача минимизации целевой функции (15) решается относительно следующих параметров коррекции:

- характеристик материалов ортотропных пластин: модулей упругости и сдвига;
- изгибных и крутильных жесткостей балок;
- жесткостей пружин, моделирующих опоры шасси и узлы навески агрегатов планера.

С целью улучшения сходимости вычислительной процедуры оптимизации характеристики разных типов перед коррекцией масштабируются таким образом, чтобы их максимальное значение не превышало единицы. При этом значения жесткостей пружин приводятся к логарифмическому масштабу, что обеспечивает их варьирование в широком диапазоне значений. Дополнительно устанавливаются допустимые пределы изменений значений корректируемых характеристик.

Для проведения модальных испытаний изделие устанавливалось на штатные шасси с приспущенными пневматиками. Схема расположения акселерометров представлена на рисунке 9.

В силу симметрии расчетной модели формы колебаний сравнивались только по датчикам, установленным на одну из половин ЛА. Коррекция была проведена в три этапа. На первом этапе корректировались твердотельные тона: перемещения и вращения относительно осей глобальной систе-

мы координат. В ходе этого этапа изменялись только жесткости опор. На следующем шаге достигалось соответствие тонов вращения органов управления посредством варьирования крутильных жесткостей удерживающих их пружин. На последнем этапе изменялись упругие характеристики балок и пластин так, чтобы достичь согласования по тонам, которые происходят с преимущественным деформированием элементов планера.

Особо отметим, что в силу необходимости задания разных полиномов для исследования симметричного и антисимметричного спектра модель была разделена на две части, которые корректировались независимо. Результаты коррекции симметричного и антисимметричного спектра расчетной модели приведены в таблицах 2 и 3. Распределения изменений некоторых физических характеристик модели, которые были получены для случая коррекции симметричного спектра, представлены на рисунке 10.

Вследствие изменения упругих характеристик меняются и формы колебаний. На рисунке 11 приведены формы колебаний, полученные экспериментально (черный цвет) и после коррекции расчетной модели (красный цвет).

Оперативная подготовка исходных данных для коррекции расчетных моделей ЛА производится с помощью комплекса программ, позволяющих проводить обработку и представление результатов модального анализа непосредственно в процессе испытаний.

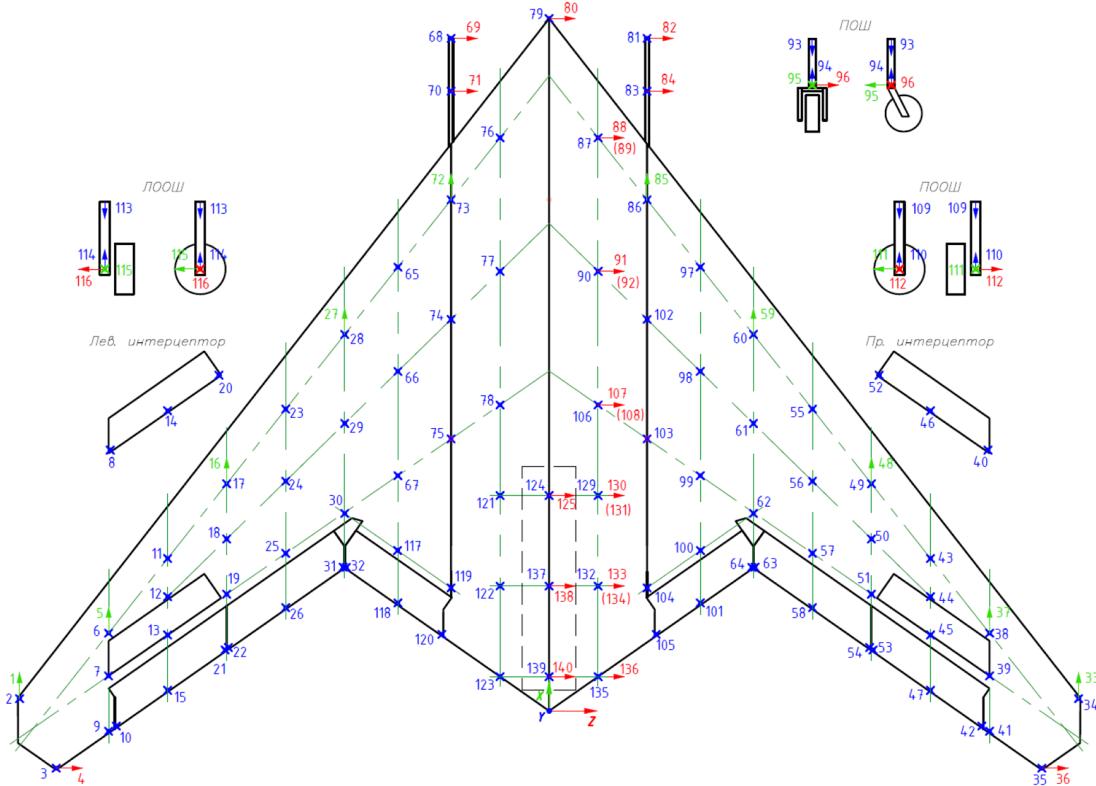


Рисунок 9. Схема установки акселерометров

Таблица 2

Результаты коррекции симметричного спектра

Тон	МАС	Относительная частота		Погрешность после коррекции, %	Примечание
		Эксперимент	После коррекции		
1	0,99	1,00	1,03	3,47	Колебания как твердого тела
2	0,96	1,84	1,81	-1,47	
3	0,97	2,31	2,36	2,25	
4	0,89	5,92	5,80	-1,99	
5	0,91	7,86	7,64	-2,75	
6	0,82	9,08	9,01	-0,68	Упругие колебания планера
7	0,52	9,42	9,81	4,15	
8	0,99	10,18	10,23	0,48	
9	0,43	11,21	11,13	-0,76	
10	0,66	8,15	8,43	3,42	Вращения органов управления

Таблица 3

Результаты коррекции антисимметричного спектра

Тон	МАС	Относительная частота		Погрешность после коррекции, %	Примечание
		Эксперимент	После коррекции		
1	0,98	1,00	1,01	-0,69	Колебания как твердого тела
2	0,94	2,66	2,74	-3,02	
3	0,88	5,18	5,52	-6,15	
4	0,76	6,64	7,06	-5,99	
5	0,11	12,07	12,09	0,16	
6	0,61	6,88	6,53	5,39	Упругие колебания планера
7	0,96	9,65	9,69	-0,41	
8	0,15	11,20	10,98	1,99	
					Вращения органов управления

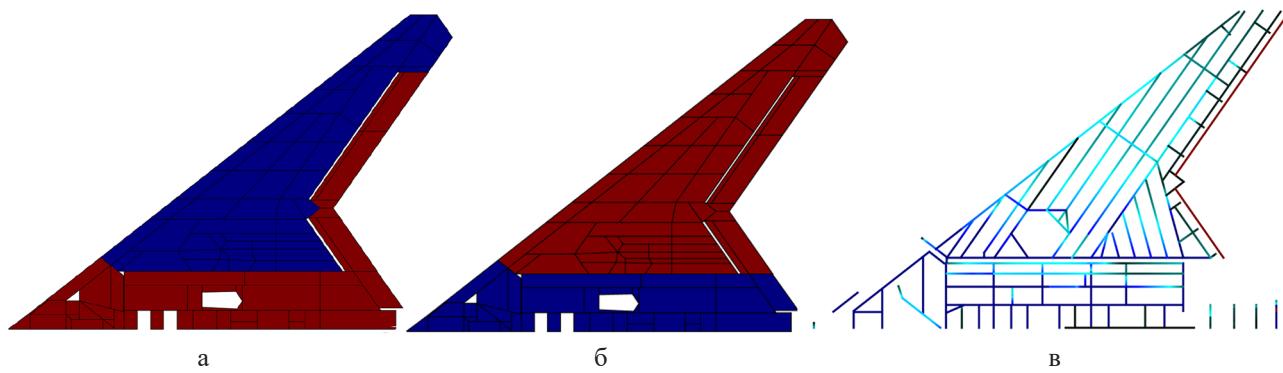


Рисунок 10. Изменения физических характеристик модели после коррекции:
а – модулей упругости по первой главной оси; б – модулей упругости по второй главной оси;
в – изгибных жесткостей балок

Заключение

В статье изложены решения ряда задач многоплановой проблемы коррекции расчетных динамических моделей летательных аппаратов по результатам экспериментального модального анализа. Обоснован выбор методики модальных испытаний ЛА и осуществлена автоматизирован-

енная обработка их результатов. Представлены методы коррекции упругих и восстановления диссипативных характеристик расчетных моделей, состоящие в дополнении исходных конечно-элементных моделей внутренними и внешними корректирующими элементами. Параметры этих элементов являются неизвестными, разыскиваемыми в ходе решения задачи

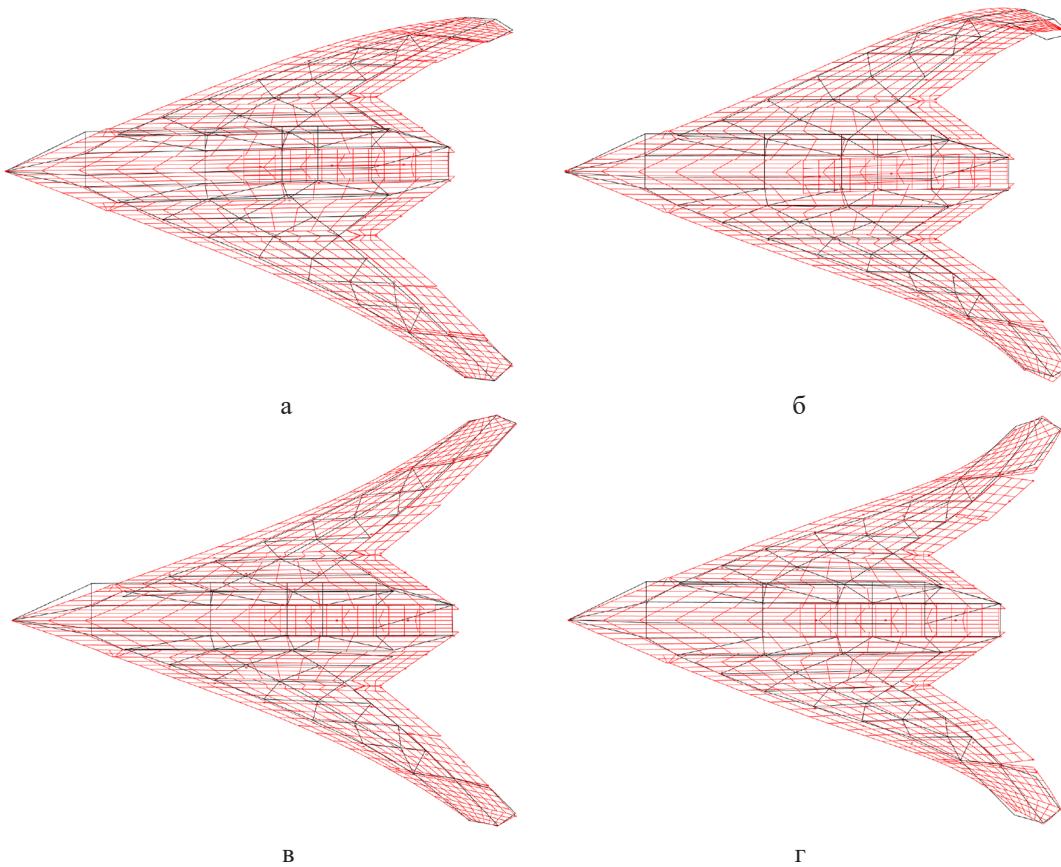


Рисунок 11. Сопоставление экспериментальных (черный цвет) и скорректированных форм колебаний модели (красный цвет): а – симметричный изгиб крыла I-го тона; б – симметричный изгиб крыла II-го тона; в – антисимметричный изгиб крыла I-го тона; г – антисимметричный изгиб крыла II-го тона

оптимизации по целевым значениям из результатов экспериментального модального анализа. Показана сходимость и устойчивость алгоритма коррекции упругих характеристик к погрешностям в целевых значениях частот собственных тонов колебаний. Критерием оценки сходимости являлась мера искажения форм собственных

колебаний по критерию модального соответствия. Эффективность разработанных методик и программного обеспечения подтверждена результатами решения практических задач коррекции расчетных моделей консоли крыла самолета и полноразмерного самолета типа «летающее крыло».

Список литературы

- [1] Карклэ П.Г., Смыслов В.И. Модальные испытания летательных аппаратов и воспроизведение силовых воздействий. Москва: Техносфера, 2017. 156 с.
- [2] Межин В.С., Обухов В.В. Практика применения модальных испытаний для целей верификации конечно-элементных моделей конструкций изделий ракетно–космической техники // Космическая техника и технологии. 2014. № 1 (4). С. 86–91.
- [3] О современных методиках наземных испытаний самолетов в аэроупругости / П.Г. Карклэ, В.А. Малютин, О.С. Мамедов, В.Н. Поповский, А.В. Смотров, В.И. Смыслов // Труды ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского. 2012. № 2708. 34 с.
- [4] Dat R. Essais de vibration d'une structure comportant du frottement sec / R. Dat, R. Tretout, M. Lafont // La Recherche Aerospatiale. 1975. № 3. pp. 169–174.
- [5] Смыслов В.И. Некоторые вопросы методики многоточечного возбуждения при экспериментальном исследовании колебаний упругих конструкций // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 5. С. 110–118.
- [6] Хейлен В., Ламменс С., Сас П. Модальный анализ: теория и испытания. Москва: Новатест, 2010. 319 с.
- [7] Бернс В.А. Модальная идентификация динамических систем на основе монофазных колебаний // Научный вестник НГТУ. 2010. № 3 (40). С. 99–109.

- [8] Practical aspects of shaker measurements for modal testing / M. A. Peres, R. W. Bono, D. L. Brown // Proceedings of ISMA 2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD 2010. Leuven, Belgium, 2010. pp. 2539–2550.
- [9] Advanced GVT testing of the Gulfstream G650 / R. Brillhart, K. Napolitano, L. Morgan, R. LeBlanc // Sound and Vibration. 2011. № 8. pp. 6–9.
- [10] Mottershead J. E. The sensitivity method in finite element model up-dating: A tutorial / J. E. Mottershead, M. Link, M. I. Friswell // Mechanical Systems and Signal Processing. 2011. Vol. 25. pp. 2275–2296.
- [11] Sensitivity-based finite element model updating with natural frequencies and zero frequencies for damped beam structures / C. H. Min, S. Hong, S. Y. Park, D. C. Park // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2014. Vol. 6 (4). pp. 904–921.
- [12] Hernandez E. M. Iterative finite element model updating in the time domain / E. M. Hernandez, D. Bernal // Mechanical Systems and Signal Processing. 2013. Vol. 34. pp. 39–46.
- [13] Chen L. Structural dynamic model updating based on multi-level weight coefficients / L. Chen, Y. Guo, L. Li // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 71. pp. 700–711.
- [14] Бернс В. А. Оценка точности определения характеристик собственных тонов при наличии случайных ошибок в экспериментальных данных // Вестник СибГАУ. 2010. № 5 (31). С. 208–212.
- [15] Бернс В. А. Погрешности определения характеристик собственных тонов при близких собственных частотах // Контроль. Диагностика. 2011. № 3 (153). С. 12–16.
- [16] Влияние системы упругого вывешивания на точность результатов модальных испытаний летательных аппаратов / В. А. Бернс, А. В. Долгополов, Е. П. Жуков, Д. А. Маринин // Вестник СГАУ им. С. П. Королева. 2016. Т. 15, № 1. С. 18–27.
- [17] Метод коррекции конечно-элементных моделей динамических систем / Д. А. Красноруцкий, П. А. Лакиза, В. А. Бернс, Е. П. Жуков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 84–95. DOI: 10.15593/perm.mech/ 2021.3.08.
- [18] Лакиза П. А. Коррекция расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний: дисс. канд. техн. наук: 2.5.14. Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 2023. 162 с.

PROBLEMS OF FINITE ELEMENT MODEL UPDATING OF AIRCRAFT BASED ON GROUND VIBRATION TEST RESULTS

P.A. Lakiza, D.A. Krasnorutskiy,
V.A. Berns, E.P. Zhukov, A.V. Shkoda
S.A. Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation
Novosibirsk, Russian Federation
PJSC «UAC «Sukhoi Design Bureau»
Moscow, Russian Federation

The paper addresses the issues occurring during updating of computational dynamic models of aircraft based on ground vibration test results. These include selection of modal testing methodology based on the analysis of ratio between forced monophase modes and eigenmodes. Structural damping properties can be identified from test results. It is worth noting that the errors in experimental determination of eigenfrequencies are significantly lower than the ones in general masses and damping coefficients. The method for updating elastic properties of finite element models is developed. The mass matrix is assumed to be accurately defined.

The objective function is a weighted sum of squares of differences between experimental and calculated eigenfrequencies. The objective function is minimized iteratively. The robustness of the approach with respect to errors in ground vibration test results is investigated. The approach to model structural damping properties based on ground vibration test results is presented. The damping coefficients are computed and chosen as the target ones for each experimentally determined eigenmode. That indicates that in modal coordinates the matrix which consists of these coefficients is diagonal. In order to construct the damping matrix in physical coordinates, the Rayleigh damping model is used. The finite element models of aircraft wing and the aircraft of flying wing type have been updated.

Keywords: computational models of aircraft, ground vibration testing, finite element model updating, structural damping modeling, flying wing.

Submitted: 22.05.2025. Accepted: 02.07.2025.

References

- [1] Karklje P.G., Smyslov V.I. Ground vibration testing of aircraft and reproduction of forces. Moscow: Technosphere, 2017, 156 p.
- [2] Mezhin V.S., Obukhov V.V. The practice of using modal tests to verify finite element models of rocket and space hardware. Space Engineering and Technology, 2014, no. 1, vol. 4, pp. 86–91
- [3] Karklje P.G., Maljutin V.A., Mamedov O.S., Popovskij V.N., Smotrov A.V., Smyslov V.I. Modern ground vibration testing methods for aeroelasticity, TsAGI Science Journal, 2012, no. 2708, 34 p.
- [4] Dat R., Tretout R., Lafont M. Essais de vibration d'une structure comportant du frottement sec. La Recherche Aerospatiale, 1975, no. 3, pp. 169–174.
- [5] Smyslov V.I. Some issues of the multipoint excitation technique in the experimental study of vibrations of elastic structures. TsAGI Science Journal, 1972, vol. 3, no. 5, pp. 110–118.
- [6] Heylen W., Lammens S., Sas P. Modal analysis: theory and testing. Leuven, 1998, 350 p.
- [7] Berns V.A. Modal identification of dynamic systems based on monophase oscillations. Scientific Bulletin of NSTU, 2010, vol. 40, no. 3, pp. 99–109.
- [8] Peres M.A., Bono R.W., Brown D.L. Practical aspects of shaker measurements for modal testing. Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD 2010, Leuven, 2010, pp. 2539–2550.
- [9] Brillhart R., Napolitano K., Morgan L., LeBlanc R. Advanced GVT testing of the Gulfstream G650. Sound and Vibration, 2011, no. 8, pp. 6–9.
- [10] Mottershead J.E., Link M., Friswell M.I. The sensitivity method in finite element model up-dating: A tutorial. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, vol. 25, pp. 2275–2296.
- [11] Min C.H., Hong S., Park S.Y., Park D.C. Sensitivity-based finite element model updating with natural frequencies and zero frequencies for damped beam structures. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, 2014, vol. 6 (4), pp. 904–921.
- [12] Hernandez E.M., Bernal D. Iterative finite element model updating in the time domain. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, vol. 34, pp. 39–46.
- [13] Chen L., Guo Y., Li L. Structural dynamic model updating based on multi-level weight coefficients. Applied Mathematical Modelling, 2019, vol. 71, pp. 700–711.
- [14] Berns V.A. Assessment of determination accuracy of eigentones characteristics in the presence of random errors in the experimental data. Vestnik Sibsa, 2010, vol. 31, no. 5, pp. 208–212.
- [15] Berns V.A. Errors in determining characteristics of natural modes at close natural frequencies. Testing. Diagnostics, 2011, vol. 153, no. 3, pp. 12–16.
- [16] Berns V.A., Dolgopolov A.V., Zhukov E.P., Marinin D.A. Influence of the suspension system on the accuracy of the aircraft modal testing results. Vestnik of Samara University, 2016, vol. 15, no. 1., pp. 18–27.
- [17] Krasnorutskiy D.A., Lakiza P.A., Berns V.A., Zhukov E.P. Finite Element Model Updating Method of Dynamic Systems. PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, no. 3, pp. 84–95. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.08
- [18] Lakiza P.A. Korrekcija raschetnyh modelej letatel'nyh apparatov po rezul'tatam modal'nyh ispytanij [Finite element model updating of aircraft based on ground vibration test results]. Kand, Diss. Novosibirsk, 2023. 162 p.

Сведения об авторах

Лакиза Павел Анатольевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина». Окончил Новосибирский государственный технический университет в 2020 году. Область научных интересов: динамика и прочность летательных аппаратов.

Красноруцкий Дмитрий Александрович – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина». Окончил Новосибирский государственный технический университет в 2008 году. Область научных интересов: динамика и прочность летательных аппаратов.

Бернс Владимир Андреевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина». Окончил Новосибирский электротехнический институт в 1975 году. Область научных интересов: динамика и прочность летательных аппаратов.

Жуков Егор Павлович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина». Окончил Новосибирский государственный технический университет в 2014 году. Область научных интересов: динамика и прочность летательных аппаратов.

Шкода Александр Васильевич – главный конструктор по прочности ПАО «Объединённая авиастроительная корпорация «Опытно-конструкторское бюро Сухого». Окончил Московский авиационный институт в 1993 году. Область научных интересов: динамика и прочность авиационной техники.