

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ОБРАБОТКЕ МЕЖСПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А. Е. Шмидт<sup>✉1</sup>, Т. Г. Орешенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО «Информационные спутниковые системы»

имени академика М. Ф. Решетнёва»

г. Железногорск, Красноярский край, Российская Федерация

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий

имени академика М. Ф. Решетнёва

г. Красноярск, Российская Федерация

Статья посвящена разработке метода фильтрации шумов в межспутниковых измерениях на основе преобразования Фурье и адаптивной обработки цветочного шума. Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения точности спутниковых навигационных систем в условиях роста помех и сложности операционной среды. Основная цель – снижение случайных и систематических погрешностей в невязках измерений, возникающих из-за различий между расчётными и фактическими значениями задержек сигналов между спутниками. Предложенный метод сочетает спектральный анализ с использованием преобразования Фурье для декомпозиции сигнала на частотные компоненты и адаптивные алгоритмы, учитывающие специфику спектральной плотности цветочного шума. Это позволяет эффективно выделить низкочастотный полезный сигнал, подавить высокочастотные шумы и минимизировать искажения. Результаты демонстрируют снижение уровня шумов на 0.5 м при сохранении структурной целостности данных, что подтверждается анализом амплитудных и фазовых спектров, а также коррелограмм. Метод показал эффективность в условиях доминирования розового шума, связанного с долговременными трендами и аппаратными задержками. Применение разработки способствует повышению точности оценок задержек в задачах геодезии, авиационной навигации и мониторинга. Перспективы работы связаны с интеграцией алгоритмов машинного обучения для динамической настройки параметров фильтрации в реальном времени и оптимизацией вычислительных ресурсов.

**Ключевые слова:** преобразование Фурье, цветочный шум, фильтр нижних частот, межспутниковые измерения, невязка, спутниковая навигация, спектральный анализ, адаптивная фильтрация, точность позиционирования, шумоподавление.

Поступила в редакцию: 21.05.2025. Принята к печати: 28.11.2025.

### Введение

Современные спутниковые навигационные системы играют ключевую роль в геодезии, телекоммуникациях, мониторинге окружающей среды и управлении транспортными потоками. Точность позиционирования в таких системах зависит от качества обработки сигналов и точности эфемеридно-временной информации, передаваемой в составе навигационных сообщений, которая, в свою очередь, определяется целым рядом факторов, в том

числе эффективностью предварительной обработки используемой измерительной информации, включающей, кроме прочего, устранение шумов в межспутниковых измерениях.

Невязками будем считать расхождения между измеренными и расчётными значениями задержек прохождения сигнала между двумя спутниками одной орбитальной системы, содержащие высокочастотные шумовые компоненты, которые искажают полезный сигнал и снижают надёжность навигационных данных. Особую сложность представляет наличие цветочного шума, характеризующегося неравномерной спектральной плотностью, что делает традиционные методы фильтрации, рассчитанные

✉ shmidt.al.ye@yandex.ru

© Ассоциация «ТП «НИСС», 2025

на отбраковку аномальных значений, недостаточно эффективными.

В данной работе исследуется подход, объединяющий преобразование Фурье и адаптивную обработку цветового шума, для создания фильтра нижних частот, ориентированного на очистку невязок межспутниковых задержек от белого шума. Преобразование Фурье позволяет декомпозировать сигнал на частотные компоненты, выделяя низкочастотную часть, соответствующую полезным данным, и подавляя высокочастотные шумы. Однако в условиях доминирования цветового шума стандартные частотные фильтры могут искажать сигнал из-за отсутствия учёта специфики его спектральных характеристик. Для решения этой проблемы предлагается использовать адаптивные алгоритмы, которые динамически корректируют параметры фильтрации, учитывая особенности спектральной плотности шума.

Актуальность исследования обусловлена растущими требованиями к точности спутниковых систем в условиях увеличения числа помех и сложности операционной среды. Предложенная методика направлена на минимизацию как случайных, так и систематических погрешностей.

Работа демонстрирует, что комбинация спектрального анализа и адаптивной обработки цветового шума не только повышает точность оценок задержек, но и сохраняет структурную целостность полезного сигнала. Результаты исследования открывают перспективы для интеграции данных методов в реальные системы обработки спутниковых данных, а также для их дальнейшего развития с применением технологий машинного обучения и оптимизации вычислительных ресурсов.

## 1. Основные принципы преобразования Фурье

Преобразование Фурье является математическим методом разложения сложного сигнала на набор простых гармонических составляющих с различными частотами. В результате этого преобразования временной ряд данных преобразуется в спектр, представляющий собой набор гармоник и соответствующих им амплитуд, фаз. Для дискретных данных используется дискретное преобразование Фурье, которое на практике реализуется с помощью быстрого преобразования Фурье – наиболее эффективного алгоритма вычисления преобразования Фурье [1, 2].

Преобразование Фурье в обработке межспутниковых измерений может иметь несколько применений, указанных ниже.

### 1.1. Спектральный анализ

Преобразование Фурье позволяет проводить анализ спектра мощности сигнала межспутни-

ковой радиолинии, выявляя доминирующие частоты, соответствующие различным физическим процессам, таким как гравитационные аномалии, приливные эффекты и орбитальные возмущения. Этот анализ позволяет идентифицировать и разделить сигналы различной природы, что важно для правильной интерпретации данных межспутниковых измерений.

### 1.2. Фильтрация шума

Шум и помехи в данных межспутниковых измерений часто имеют характерные частотные диапазоны, отличные от полезного сигнала. В частотной области можно применить фильтры, подавляющие нежелательные частоты, и сохранить полезный сигнал. Это позволяет существенно повысить точность измерений [1].

### 1.3. Восстановление сигналов

Используя преобразование Фурье, можно восстанавливать пропущенные или поврежденные данные в межспутниковых измерениях. Зная частотные характеристики сигнала, можно использовать интерполяцию в частотной области для восстановления отсутствующих данных [1].

### 1.4. Сжатие данных

После преобразования Фурье некоторые частотные компоненты сигнала могут иметь незначительные амплитуды и быть отброшены без существенной потери информации. Это позволяет составить массив из амплитуд и фаз, дающий возможность передавать данные с меньшими затратами вычислительной мощности [3].

Спектральный анализ заключается в определении спектра сигнала и его дальнейшей обработке. Спектром сигнала называется множество амплитуд и начальных фаз гармонических колебаний кратных частот, сумма которых равна сигналу

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \sin(\omega_k t + \theta_k), \quad (1)$$

где  $k$  – номер гармоники;  $N$  – длина массива исходных данных;  $\omega_k$  – частота гармоники  $k$ ;  $A_k$  – амплитуда гармоники  $k$ ;  $\theta_k$  – фаза гармоники  $k$ .

Для обработки межспутниковых измерений перед применением преобразования Фурье следует провести предварительную обработку данных, рассчитать аналог навигационного параметра с учетом коррекции релятивистских и других эффектов, рассчитать невязки и провести отбраковку аномалий. Формула расчета невязки представлена ниже [4].

$$\Delta S(t_i) = S_{nm}(t_i) - \tilde{S}_{nm}(t_i), \quad (2)$$

где  $S_{nm}(t_i)$  – псевдодальномерный навигационный параметр (ПНА);  $\hat{S}_{nm}(t_i)$  – расчетный аналог псевдодальномерного навигационного параметра (РА).

Для качественного анализа следует использовать массив данных, кратный циклу повторения данных. Спутники исследуемой системы находятся на околокруговой орбите на высоте 19100 км в трех плоскостях и совершают один виток вокруг Земли за 11 часов 15 минут. Аппаратура межспутниковой радиолонии проводит измерения между космическими аппаратами (далее – КА) на сеансах связи. Сеанс длится 15 минут в начале каждого часа, а измерения проводятся с частотой одно измерение в 20 с.

Таким образом, за один оборот вокруг Земли количество измерений можно рассчитать следующим образом:

$$N_6 = 12 \text{ сеансов} \cdot \frac{15 \text{ минут}}{20 \text{ секунд}} = 540 \text{ измерений}. \quad (3)$$

Данное соотношение выполнимо для пары КА со 100 % радиовидимостью, т.е. расположенных в одной плоскости. Невязка между ПНА и РА для подобной пары КА представлена на рисунке 1.

Аргументом функции преобразования Фурье является массив временных отсчетов из  $N$  элементов, а результатом – два массива длиной  $N/2$  элементов, соответствующие действительной и мнимой частям преобразования Фурье.

Сектор гармонических колебаний можно представить в виде еще двух спектров: амплитудного и фазового.

Амплитудный спектр – это множество амплитуд гармонических колебаний кратных частот.

$$A_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)}, \quad (4)$$

где  $a_k$  – коэффициент при косинусной составляющей гармоники  $k$ ;  $b_k$  – коэффициент при синусной составляющей гармоники  $k$ .

Фазовый спектр – это множество начальных фаз гармонических колебаний кратных частот:

$$\theta_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (5)$$

Если спектр известен, то сигнал как функцию времени всегда можно получить с помощью выражения:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2} (a_k \cos(2\pi \frac{k}{N} x) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{N} x)). \quad (6)$$

Далее рассмотрим применение преобразования Фурье в качестве фильтра нижних частот для устранения случайных погрешностей межспутниковых измерений.

## 2. Алгоритм. Фильтр нижних частот

Цвет шума (белый, розовый, красный, синий и т.д.) связан с распределением энергии шума по частотам. Это распределение может быть использовано для анализа погрешностей, содержащихся во временном ряде, так как шум часто является проявлением случайных погрешностей или неопределённостей в данных.

Цвет шума определяется зависимостью спектральной плотности мощности от частоты. Ниже представлены описание и характеристики для разных типов шума [6–8].

Чтобы проанализировать погрешности во временном ряде, используем следующий алгоритм.

Спектральная плотность мощности:

$$S_k = \frac{A_k^2}{N}. \quad (7)$$

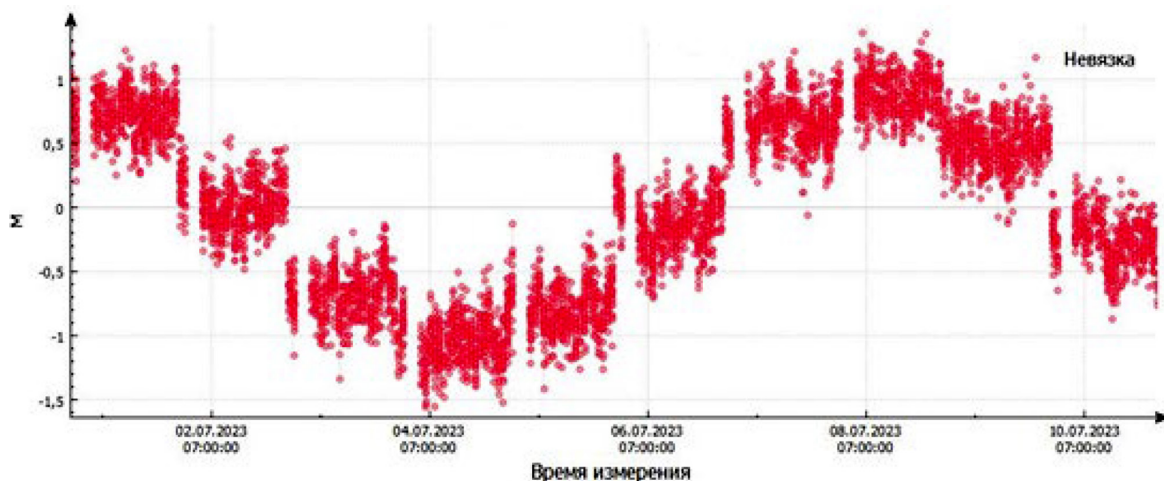


Рисунок 1. Невязка между ПНА и РА

Таблица 1

## Цвет шума и его характеристики

Цвет шума	Наклон PSD	Характеризуется	Пример
белый	0	отсутствием корреляции между значениями во временном ряде	погрешности измерений, вызванные случайными флуктуациями
розовый	-1	долговременной корреляцией и наличием низкочастотных компонент	погрешности, связанные с долговременными трендами или дрейфом
красный	-2	сильной низкочастотной корреляцией	интегральные погрешности, такие как случайное блуждание
синий	+1	преобладанием высокочастотных компонент	погрешности, связанные с быстрыми флуктуациями
фиолетовый	+2	очень сильными высокочастотными компонентами	погрешности, связанные с резкими изменениями или скачками

263

В качестве алгоритма аппроксимации используем метод Левенберга-Марквардта с нелинейной моделью типа

$$y(k) = a \cdot e^{-bk} + c. \quad (8)$$

Для определения частот сопряжения и наклонов применим метод прямого преобразования Лапласа:

$$Y(s) = \frac{(a+c) \cdot s + c \cdot b}{s \cdot (s+b)}. \quad (9)$$

Критическими точками, определяющими поведение системы в частотной области, явля-

ются нули (корни числителя) и полюсы (корни знаменателя) передаточной функции  $Y(s)$ . Информация о наклонах и частотах сопряжения после перехода во временную область представлена в таблице 2.

Если наклон меньше 0,09, то все правые гармоники будут относиться к белому шуму. Ниже представлен амплитудный и фазовый спектр (рисунки 3 и 4) анализируемых данных, на графиках также установлены метки частот, где одна частота соответствует одному витку пары КА.

В таблице 3 приведены характеристики для исходных данных без учета белого шума.

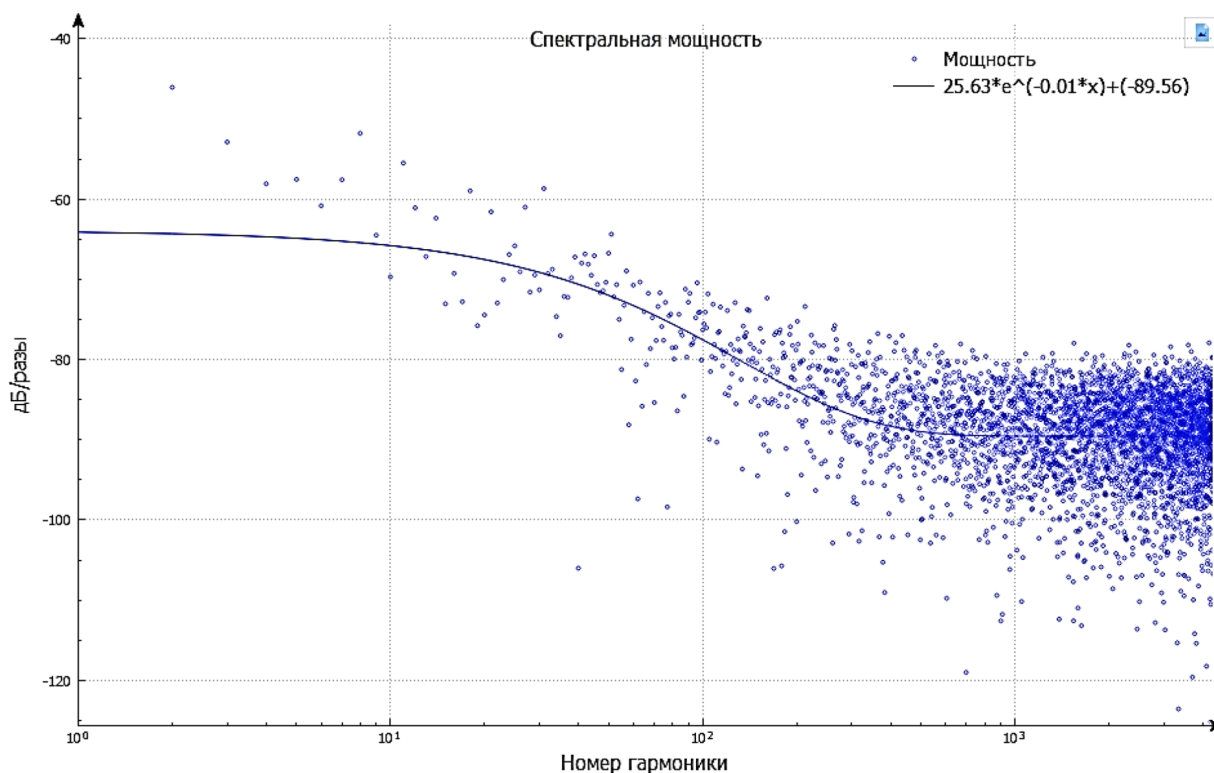


Рисунок 2. Спектральная мощность невязки между ПНА и РА



Таблица 2

Цвет шума и его характеристики

Начальная гармоника	Конечная гармоника	Наклон	Разница, дБ
0	592	-0.91512	25.3377
593	829	-0.0100815	0.241214
830	4320	-0.00134672	0.0477647

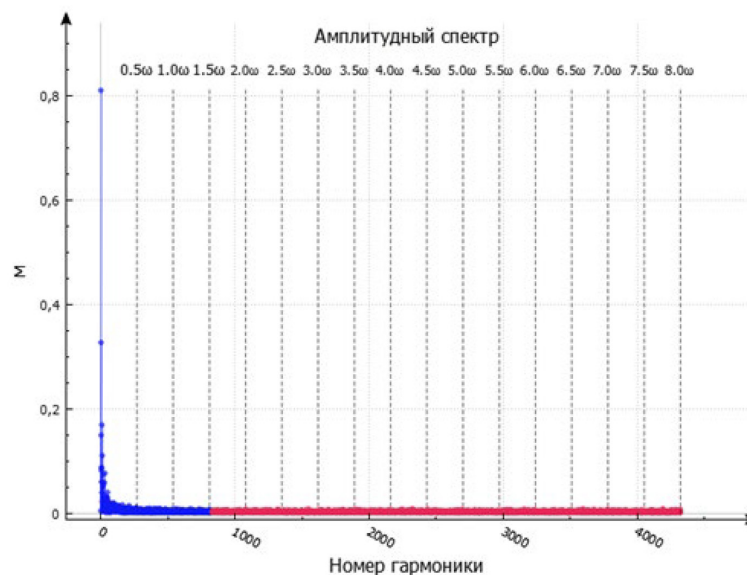


Рисунок 3. Амплитудный спектр невязки между ПНА и РА: синий – амплитуды гармоник отфильтрованных данных, красный – амплитуды гармоник белого шума

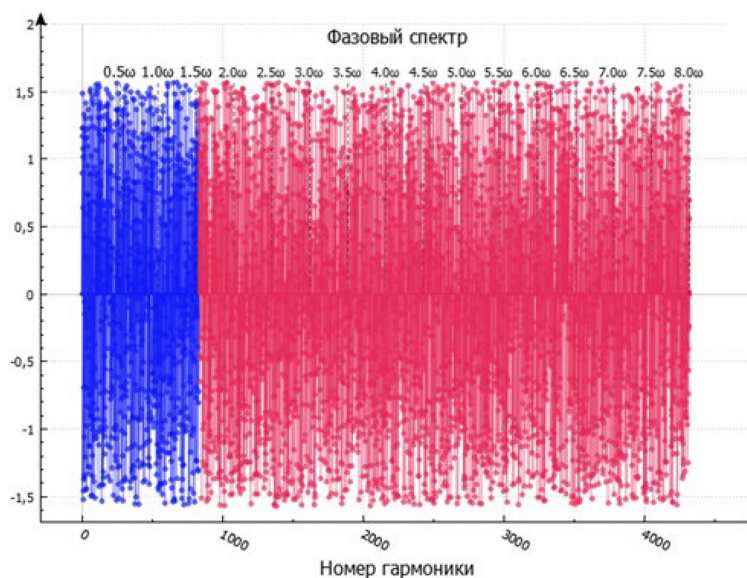


Рисунок 4. Фазовый спектр невязки между ПНА и РА: синий – фазы гармоник отфильтрованных данных, красный – фазы гармоник белого шума

Таблица 3

Общие параметры спектрального анализа

Кол-во гармоник общее	4321	СКО исх. данных	0.687	WERE данных	92.136 %
Кол-во гармоник в данных	830	СКО данных	0.676	Мак. амплитуда	0.8094 м
Кол-во гармоник в шум	3491	СКО шум	0.121	Порог по амплитуде	0.0026 м

### 3. Анализ достоверности отбраковки белого шума

Чтобы доказать, что данные временного ряда являются шумом, восстановим из спектра амплитуд и фаз предполагаемый белый шум (рисунок 5).

Шумовые данные обычно являются стационарными, то есть их статистические свойства (среднее, дисперсия) не зависят от времени и близятся к нулю.

Среднее значение:

$$\bar{X}_{ш} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 4.35 \cdot 10^{-16} \text{ м.} \quad (10)$$

Дисперсия:

$$\sigma_{ш}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{ш})^2}{n} = 0.015. \quad (11)$$

В анализе временных рядов автокорреляционная функция показывает степень линейной статистической связи между значениями временного ряда. Численно автокорреляционная функция представляет собой последовательность коэффициентов корреляции между исходным рядом и его копией, сдвинутой на заданное число интервалов ряда (это число называется лагом  $L$ ):

$$f(L) = \sum_{i=0}^{n/4} r_{i,i-L}, \quad (12)$$

где  $n$  – количество элементов временного ряда;  $r$  – коэффициент корреляции.

С увеличением лага количество элементов ряда, для которых вычисляется коэффициент кор-

реляции, уменьшается. На практике максимальный лаг не должен превышать четверти длины ряда [9, 10].

График зависимости коэффициента корреляции от лага называется коррелограммой и представлен на рисунке 6.

Корреляционная функция достигает максимума при  $L = 0$ , что означает полную корреляцию ряда с самим собой – отсутствие закономерностей в ряде. Значения коэффициентов корреляции очень малы и варьируются в диапазоне от  $-4.16 \cdot 10^{-5}$  до 0.0002, что соответствует характеристикам белого шума.

Восстановим из спектра амплитуд и фаз данные, не содержащие погрешности типа белого шума (рисунок 7).

Среднее значение ряда составляет 0.004 м, а дисперсия – 0.457.

Коэффициенты корреляции находятся в пределах от  $-0.2$  до  $0.5$  и имеют вид синусоидальной зависимости. Исключение белого шума уменьшает разброс невязки межспутниковых измерений на  $0.5$  м, при этом сохраняя структуру.

Таким образом, восстановленные данные больше не содержат погрешностей измерений, связанных с белым шумом, который возникает на фоне:

- случайных флуктуаций;
- теплового излучения (например, шума Джонсона-Найквиста в электронных компонентах);
- нетеплового космического излучения (реликтовый фон, синхротронное излучение галактик, солнечная активность).

Эти факторы создают аддитивные помехи в радиолиниях связи, искажая полезный сигнал.

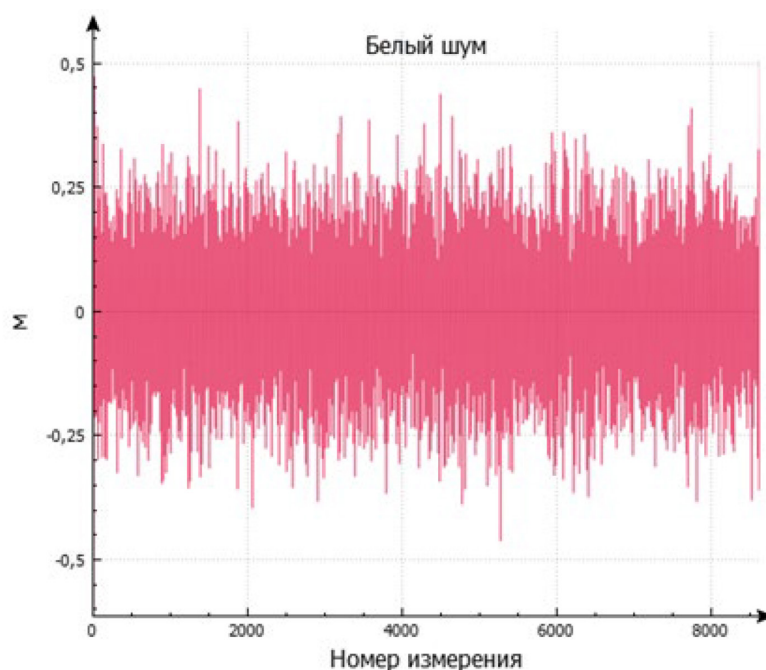


Рисунок 5. Отбракованный шум

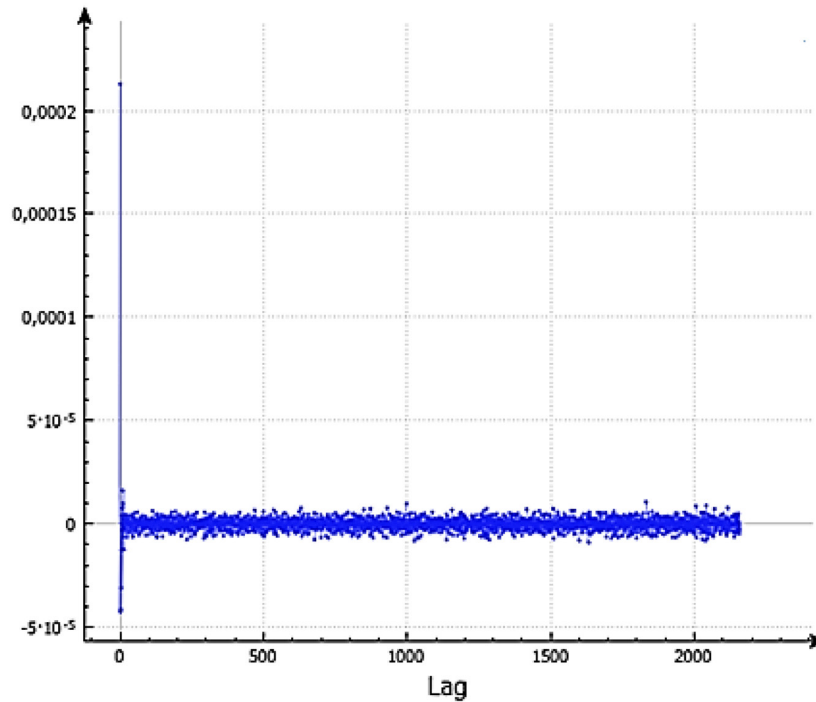


Рисунок 6. Коррелограмма шума

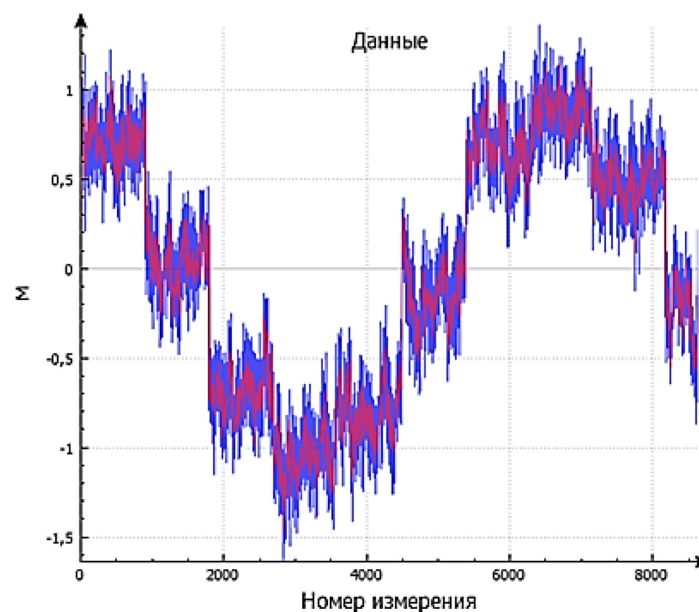


Рисунок 7. Восстановленные данные без шума: синий – исходные данные, красный – данные, не содержащие белый шум

Однако в данных сохраняется спектральная зависимость, характерная для розового шума в диапазоне частот от  $k = 0$  до  $k = k_{\text{ш}} = 830$ , обусловленная:

- долговременными трендами (медленные вариации сигнала);
- дрейфом нуля (систематические смещения);
- некомпенсированными расхождениями шкал времени (например, из-за относительного движения приемника и передатчика);
- аппаратными задержками (распространение сигнала в аналоговых трактах, деградация материалов компонентов).

Возможными источниками розового шума в системе являются:

- электронные компоненты – дрейф параметров усилителей, АЦП/ЦАП, термоэлектрические эффекты в схемах;
- нестабильность опорных генераторов;
- программные задержки в цифровой обработке.

## Заключение

Применение преобразования Фурье и обработка цветного шума для фильтрации низких частот

в задаче устранения шумов в остаточных невязках межспутниковых измерений демонстрирует высокую эффективность в улучшении точности навигационных систем. Использование спектрального анализа позволило выделить низкочастотные компоненты, соответствующие полезному сигналу, и отделить их от высокочастотных шумовых составляющих. Обработка цветового шума, в свою очередь, обеспечила адаптивную фильтрацию с учетом специфики спектральной плотности помех, характерных для межспутниковых измерений. Это позволило минимизировать искажение полезного сигнала, сохранив его информативность, и повысить устойчивость фильтрации к разнородным шумам.

Результаты исследования подтверждают, что комбинация данных методов снижает уровень случайных ошибок и способствует повышению надежности оценок задержек в условиях ограниченной точности измерения. Это особенно значимо для задач спутниковой геодезии, навигации и мониторинга, где требования к качеству данных крайне высоки.

Дальнейшее развитие подхода может быть связано с интеграцией адаптивных алгоритмов машинного обучения для динамической настройки параметров фильтрации, а также оптимизацией вычислительной сложности для обработки данных в реальном времени. Предложенная методика открывает перспективы для создания более точных и устойчивых систем навигационного определения.

## Список литературы

- [1] Иванов В. А., Медведев В. С., Чемоданов Б. К., Ющенко А. С. Математические основы автоматического регулирования: в 2 т. Т. II. М.: Высшая школа, 2009. 94 с.
- [2] Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2012. 856 с.
- [3] Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 2018. 584 с.
- [4] Ганжа В. С., Марарескул Т. А., Муратов Д. С. Калибровка бортовой аппаратуры измерения псевдодальности между космическими аппаратами для повышения точности определения расхождения их шкал времени // Известия высших учебных заведений / Машиностроение. 2021. № 12. С. 100–106.
- [5] Istepanian R. S. H., Whidborne J. F. Digital Signal Processing for Measurement Systems: Theory and Applications. London: Springer, 2016. 309 p.
- [6] Wu H., Li K., Shi W. et al. A wavelet-based hybrid approach to remove the flicker noise and the white noise from GPS coordinate time series // GPS Solutions. 2015, vol. 19, pp. 511–523.
- [7] Stoica P., Moses R. L. Spectral Analysis of Signals. 2nd ed. Pearson Prentice Hall, 2016. 452 p.
- [8] European Space Agency. Galileo Open Service Signal in Space Interface Control Document [Электронный ресурс]. URL: [www.gsc-europa.eu](http://www.gsc-europa.eu) (дата обращения: 10.10.2024).
- [9] Лотонов М. А., Донченко С. И., Федотов В. Н. Оценка погрешности определения псевдодальности в спутниковой радиолокации // Измерительная техника. 2010. № 3. С. 34–36.
- [10] Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. New Jersey: Prentice Hall, 2017. 595 p.

## APPLICATION OF FOURIER TRANSFORM IN PROCESSING INTER-SATELLITE MEASUREMENTS

**A. E. Shmidt<sup>1</sup>, T. G. Oreshenko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>JSC «Academician M. F. Reshetnev» Information Satellite Systems»  
Zheleznogorsk, Krasnoyarsk region, Russian Federation

<sup>2</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
Krasnoyarsk, Russian Federation

*The article presents a method for noise filtering in inter-satellite measurements based on Fourier transform and adaptive colored noise processing. The relevance of the study stems from the need to enhance the accuracy of satellite navigation systems amid increasing interference and operational complexity. The primary goal is to reduce random and systematic errors in measurement residuals caused by discrepancies between calculated and actual signal delays*



*between satellites. The proposed method combines spectral analysis using Fourier transform to decompose signals into frequency components with adaptive algorithms that account for the spectral density characteristics of colored noise. This approach effectively isolates low-frequency useful signals, suppresses high-frequency noise, and minimizes signal distortion. The results demonstrate a noise level reduction of 0.5 m while preserving data structural integrity, confirmed by amplitude and phase spectrum analysis, as well as correlograms. The method proved effective in environments dominated by pink noise associated with long-term trends and hardware delays. The developed technique improves delay estimation accuracy in geodetic tasks, aviation navigation, and monitoring applications. Future research directions include integrating machine learning algorithms for real-time dynamic adjustment of filtering parameters and optimizing computational resources.*

**Keywords:** *Fourier transform, colored noise, low-pass filter, intersatellite measurements, residuals, satellite navigation, spectral analysis, adaptive filtering, positioning accuracy, noise suppression.*

*Submitted: 21.05.2025. Accepted: 28.11.2025*

## References

- [1] Ivanov V.A., Medvedev V.S., Chemodanov B.K., Yushchenko A.S. Mathematical Foundations of Automatic Control. Moscow, Vysshaya Shkola, 2009, 94 p.
- [2] Oppenheim A.V., Schaffer R.W. Digital Signal Processing. Moscow, Tekhnosfera, 2012, 856 p.
- [3] Rabiner L., Gould B. Theory and Application of Digital Signal Processing. Moscow, Mir, 2018, 584 p.
- [4] Ganzha V.S., Marascul T.A., Muratov D.S. Calibration of Onboard Pseudorange Measurement Equipment for Spacecraft to Improve Accuracy of Time Scale Discrepancy Determination // Bulletin of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering, 2021, no. 12, pp. 100–106.
- [5] Istepanian R.S.H., Whidborne J.F. Digital Signal Processing for Measurement Systems: Theory and Applications. London, Springer, 2016, 309 p.
- [6] Wu H., Li K., Shi W. et al. A wavelet-based hybrid approach to remove the flicker noise and the white noise from GPS coordinate time series // GPS Solutions, 2015, vol. 19, pp. 511–523.
- [7] Stoica P., Moses R.L. Spectral Analysis of Signals. 2nd ed. Pearson Prentice Hall, 2016, 452 p.
- [8] European Space Agency. Galileo Open Service Signal in Space Interface Control Document. Available at: [www.gsc-europa.eu](http://www.gsc-europa.eu) (accessed 10.10.2024).
- [9] Lotonov M.A., Donchenko S.I., Fedotov V.N. Error Estimation of Pseudorange Determination in Satellite Radar // Measurement Techniques, 2010, no. 3, pp. 34–36.
- [10] Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. New Jersey, Prentice Hall, 2017, 595 p.

## Сведения об авторах

*Шмидт Алина Евгеньевна* – магистрант Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва, инженер-программист III категории АО «РЕШЕТНЁВ». Область научных интересов: межспутниковые измерения, программирование, автоматизации.

*Орешенко Татьяна Геннадьевна* – кандидат технических наук, доцент Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва. Окончила Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнёва в 2010 году. Область научных интересов: автоматизация, системы управления, радиоэлектроника.